ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

GROUPE DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL

79, Boulevard Haussmann, 79

PARIS

REVUE TRIMESTRIELLE

TOME XVI. JANVIER 1961. N° 63

TOME XVI — JANVIER 1961 — N° 63

ANNALES
DE
RADIOÉLECTRICITÉ

GROUPE DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL

COMPAGNIES FRANÇAISES

CSF COMPAGNIE GÉNÉRALE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL

ANALAC SOCIÉTÉ POUR L'ÉTUDE ET LA RÉALISATION DES PROCÉDÉS ÉLECTRONIQUES DE CALCUL
AREL APPLICATIONS RADIO-ÉLECTRIQUES
CAMECA COMPAGNIE D'APPLICATIONS MÉCANIQUES A L'ÉLECTRONIQUE, AU CINÉMA ET A L'ATOMISTIQUE
CERE CENTRE D'ÉTUDES ET DE RÉALISATIONS ÉLECTRONIQUES
CETT COMPAGNIE EUROPÉENNE DES TUBES TÉLÉPHONIQUES
COSEM COMPAGNIE GÉNÉRALE DES SEMI-CONDUCTEURS
CICE COMPAGNIE INDUSTRIELLE DES CÉRAMIQUES ÉLECTRONIQUES
CRM COMPAGNIE RADIO-MARITIME
EURISTA COMPAGNIE EUROPÉENNE DE RÉSISTANCES
FLOQUET SOCIÉTÉ ANONYME FLOQUET
LCC LE CONDENSATEUR CÉRAMIQUE
LTI SOCIÉTÉ POUR LES APPLICATIONS ÉLECTRONIQUES DES TRANSISTORS A L'INDUSTRIE « LE TRANSISTOR INDUSTRIEL »
MOP LE MOULAGE DE PRÉCISION
OREGA SOCIÉTÉ OREGA ÉLECTRONIQUE ET MÉCANIQUE
RO SOCIÉTÉ RADIO-ORIENT
SFRA SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIO-ÉLECTRIQUE AFRIQUE
SIPT SOCIÉTÉ INTERNATIONALE DE PROGRAMMES POUR TÉLÉDIFFUSION
SOCAPEX SOCIÉTÉ SOCAPEX
SOFRADEL SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE DOCUMENTATION ÉLECTRONIQUE
STÉAFIX SOCIÉTÉ STÉAFIX ET C[ie]
STEL SOCIÉTÉ DE TRAITEMENTS ÉLECTROLYTIQUES ET ÉLECTROTHERMIQUES

79, Boulevard Haussmann, PARIS

SOMMAIRE

Rédacteur scientifique : M. Jean BERNIER

Abonnements : France : 35 NF — Étranger : 50 NF — Le numéro : 15 NF.
Prière d'adresser toute correspondance au Centre de Documentation de la C S F, 101, Boulevard Murat, Paris (16e).

UN MAGNÉTOMÈTRE A POMPAGE OPTIQUE POUR L'ÉTUDE DU CHAMP SPATIAL (1)

PAR L. MALNAR,

Département de Physique Appliquée
de la Compagnie générale de télégraphie Sans Fil

et J.-P. MOSNIER,

Chef de Travaux à l'École Normale Supérieure.

SOMMAIRE. — *Les auteurs décrivent un magnétomètre basé sur la résonance magnétique de la vapeur de césium. La résonance et sa détection sont rendues possibles au moyen du procédé de pompage optique. Un prototype de laboratoire a été étudié et ses performances ont été comparées à celles d'un magnétomètre Gulf. La sensibilité du prototype qui est actuellement de* 1 γ *sera portée à* 0,1 γ *au cours de l'étude qui se poursuit actuellement.* (C. D. U. : 621.317.444.)

SUMMARY. — *The authors describe a magnetometer based on the magnetic resonance of cæsium vapour. Optical pumping is used to produce resonance and for its detection. A laboratory model has been designed and its performance compared with that of a Gulf magnetometer. The sensitivity of the model is at present* 1 γ *and will be improved to* 0.1 γ *in the course of the work actually in hand.* (U. D. C. : 621.317.444.)

INALTSANGABE. — *Die Verfasser beschreiben ein Magnetometer, dessen Arbeitsweise auf die magnetische Resonanz des Cäsium-dampfes beruht. Die Resonanz und ihre Feststellung werden durch das optische Pumpverfahren ermöglicht. Ein Erstmuster für ein Laborgerät ist eingehend untersucht worden, und seine Leistungen sind, mit denen eines Gulf-Magnetometers verglichen worden. Die Empfindlichkeit der Erstmuster beträgt z. Z.* 1 γ *und sie soll im Zuge der Entwicklung, die weitergeführt wird, auf* 0,1 γ *gebracht werden.* (D. K. : 621.317.444.)

1. **Introduction**.

La mesure des champs magnétiques faibles a connu un regain d'intérêt au cours de ces dernières années grâce aux recherches spatiales qui ont été rendues possibles par l'utilisation des fusées et satellites artificiels.

Des appareils classiques ont déjà permis d'effectuer des mesures de champ à très haute altitude et même autour de la Lune [1]. Mais les mesures spatiales doivent faire connaître avec précision, non seulement la valeur du champ magnétique en tous points, mais aussi sa variation dans le temps. Or les appareils classiques, bien que très sensibles, ont en général une constante de temps trop grande pour déceler les variations rapides, et de plus, ils possèdent le grave inconvénient d'être sensibles à la direction du champ magnétique, ce qui impose un contrôle permanent de la stabilité de l'engin porteur.

Pour aborder la multiplicité des problèmes posés par la mesure des champs magnétiques, il a été nécessaire d'étudier une nouvelle classe d'appareils, sensibles, rapides, indépendants de la direction du champ et, de plus, légers et peu encombrants.

Ces appareils utilisent les phénomènes de résonance atomique, c'est-à-dire la transition d'un système d'atomes entre deux niveaux d'énergie grâce à l'absorption d'une onde électromagnétique. Lorsque l'énergie des niveaux dépend du champ magnétique dans lequel est placé le système d'atomes (effet Zeeman), la fréquence de résonance magnétique est une fonction de ce champ. La mesure de l'intensité du champ magnétique revient ainsi à une mesure de fréquence.

(1) Manuscrit reçu le 24 novembre 1960.

Le magnétomètre décrit ci-dessous est basé sur ce principe, le système d'atomes utilisé étant la vapeur de césium. La résonance est rendue possible grâce au procédé de pompage optique [2] qui sera décrit en même temps que le principe détaillé.

2. **Principe.**

L'état fondamental $6\,S_{\frac{1}{2}}$ du césium, grâce à l'existence d'un spin nucléaire $i = \frac{7}{2}$, comporte deux niveaux hyperfins de nombres quantiques $F = 3$ et $F = 4$, séparés par un intervalle d'énergie $E_0 = 9190$ MHz en champ nul ([1]).

Dans un champ magnétique H_0 le premier niveau se décompose en sept et le second en neuf sous-niveaux Zeeman dont les énergies pour une valeur donnée de H_0 peuvent être calculées par les formules de Breit-Rabi [3]. On trouve pour $F = 3$ que la transition $m + 1 \rightarrow m$ met en jeu l'énergie

$$(1) \qquad E = 3{,}5.10^5\, H_0 + 561\, H_0 - 26{,}7 \left(m + \frac{1}{2} \right) H_0^2$$

et pour $F = 4$, l'énergie

$$E = 3{,}5.10^5.\, H_0 - 561\, H_0 - 26{,}7 \left(m + \frac{1}{2} \right) H_0^2,$$

les champs magnétiques étant exprimés en œrsteds et l'énergie en hertz.

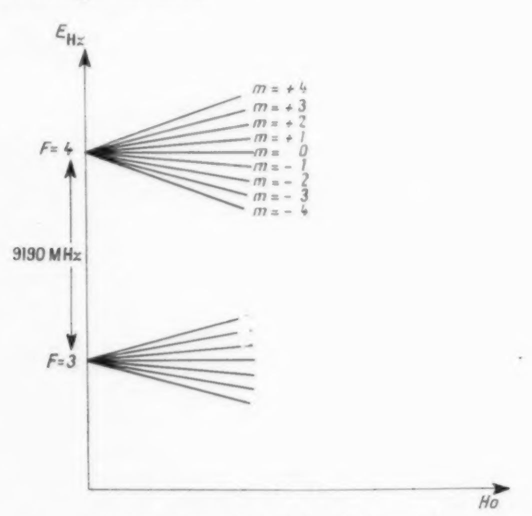


Fig. 1. — Niveaux d'énergie de l'état fondamental du césium en fonction du champ magnétique.

([1]) L'échelle des énergies est rapportée à celle des fréquences en vertu de la relation $E = h\nu$, h étant la constante de Planck.

En première approximation le diagramme donnant l'énergie des sous-niveaux en fonction du champ magnétique est représenté par la figure 1 où les courbes $E(H_0)$ sont des droites.

En vertu de la relation (1), il est possible de connaître H_0 en mesurant l'énergie E, c'est-à-dire la fréquence ν_0 de résonance susceptible d'induire des transitions $\Delta m = \pm 1$. En fait, l'écart d'énergie entre deux sous-niveaux consécutifs étant très faible devant kkT, les populations des divers sous-niveaux sont pratiquement égales et les transitions de résonance sont inobservables si l'on ne crée pas artificiellement une inégalité de populations entre ces sous-niveaux. C'est le rôle du pompage optique qui est décrit ci-dessous.

Considérons le schéma de la figure 2 qui représente les sous-niveaux Zeeman de l'un des niveaux de l'état fondamental $F = 4$ et ceux de l'un des niveaux de l'état excité $6\,P_{\frac{1}{2}}$ $(F = 3)$.

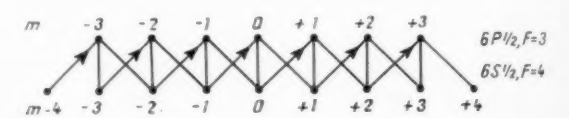


Fig. 2. — Schéma des transitions entre les niveaux $F = 4$ de l'état fondamental : $6\,S_{\frac{1}{2}}$ et les niveaux $F = 3$ de l'état excité : $6\,P_{\frac{1}{2}}$.

Les diverses transitions possibles entre ces niveaux constituent la structure Zeeman de l'une des composantes hyperfines de la raie de résonance. Si l'on irradie la vapeur de césium par cette composante polarisée circulairement à droite (par exemple), on induit sélectivement des transitions d'un sous-niveau fondamental m à un sous-niveau excité $m + 1$ (transitions indiquées par des flèches sur la figure 2). De ce sous-niveau excité $m + 1$, les atomes reviennent aux sous-niveaux de l'état fondamental m, $m + 1$, $m + 2$ en émettant des radiations de résonance diversement polarisées. Le bilan de l'opération est un enrichissement des sous-niveaux de nombre m élevé au détriment de ceux de m faible. Si le processus se poursuit assez longtemps, tous les atomes se retrouveront dans les états $m = +3$ et $m = +4$, d'où aucune radiation circulaire droite ne peut les extraire.

Malgré la complexité du diagramme complet de toutes les transitions possibles du césium, on voit qu'une irradiation circulaire droite a pour effet de « pomper obliquement » les atomes des sous-niveaux

de m faible vers ceux de m élevé. On crée ainsi la différence de population entre sous-niveaux requise pour la résonance magnétique.

Afin d'induire les transitions $\Delta m = +1$ constituant cette résonance, la vapeur de césium orientée est soumise à un champ alternatif H_1 de fréquence convenable sensiblement perpendiculaire à H_0. Ce champ est équivalent à deux champs tournant en sens inverse. L'un des deux, tournant dans le bon sens à la même vitesse que les moments angulaires, provoque les transitions désirées ([3]).

La détection de la résonance s'effectue par une méthode optique due à Dehmelt [4]. Cette méthode utilise le fait que l'absorption de la raie de résonance par une vapeur dépend de l'état d'orientation des moments angulaires dans cette vapeur. Par exemple, la composante hyperfine circulaire droite déjà envisagée est absorbée par la vapeur naturelle (transitions marquées de flèches, possibles) et ne l'est plus par la vapeur totalement orientée ($m = +3$ ou $m = +4$). D'une manière générale la vapeur orientée est plus transparente vis-à-vis de la radiation de pompage que la vapeur naturelle. Le passage par la résonance s'accompagne donc d'une augmentation du coefficient d'absorption de la vapeur qu'on peut mettre en évidence par la variation du courant de sortie d'un détecteur photoélectrique.

3. **Réalisation pratique.**

3.1. Le schéma de l'appareil découle directement du principe énoncé ci-dessus. La figure 3 donne une description du dispositif expérimental.

La lumière de pompage est obtenue par une source constituée par un tube à décharge.

Elle est polarisée circulairement, puis concentrée au moyen d'une lentille sur la cellule de résonance contenant la vapeur de césium. La lumière transmise est recueillie de nouveau par une lentille et concentrée vers une cellule photoélectrique dont le signal de sortie est porté à un niveau suffisant par un amplificateur.

Les transitions de résonance sont produites par le champ haute fréquence (160 kHz environ) créé par des bobines en position Helmholtz et alimentées par un générateur. Celui-ci est modulé en fréquence à 80 Hz de manière à balayer la raie de résonance de part et d'autre de sa valeur moyenne. Par suite de ce balayage, le coefficient de transmission de la cellule de résonance à la lumière se trouve également modulé et l'on recueille alors sur la cellule photoélectrique un signal à 80 Hz.

Ainsi que le montre la figure 4, la phase du signal détecté par rapport au signal de modulation initial, dépend de la position de la fréquence moyenne du générateur par rapport au centre de la raie de résonance. En soumettant les deux signaux à 80 Hz à un comparateur de phase, on obtient un signal

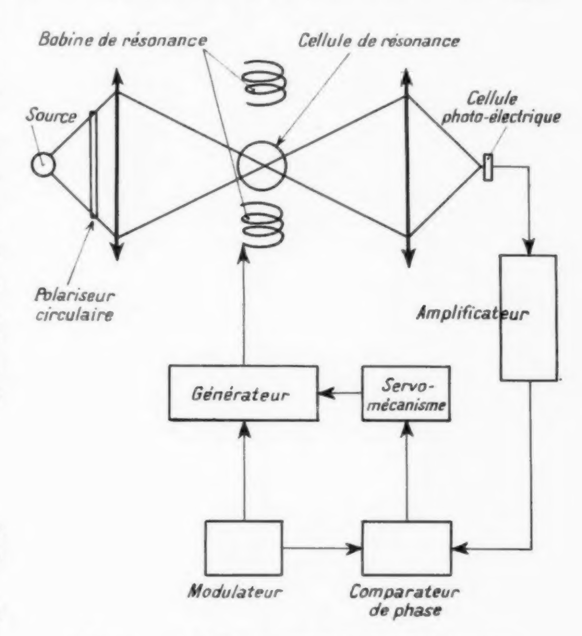


Fig. 3. — Schéma de principe du magnétomètre.

d'erreur qui, par une boucle d'asservissement, permet de fixer la fréquence du générateur à la valeur exacte de la fréquence de résonance. Le signal de sortie du générateur peut alors être introduit dans un système de comptage ou envoyé sur un discriminateur, dont le signal de sortie peut servir à l'enregistrement direct de l'intensité du champ magnétique.

Les divers éléments de cet ensemble vont être examinés avec un peu plus de détails ci-dessous.

3.2. Système optique. — L'expérimentation en laboratoire a montré l'importance du système de focalisation sur les largeurs de raie et le rapport signal/bruit obtenu. Les principaux paramètres qui interviennent sont la forme et la dimension de la

([3]) Comme dans tous les phénomènes de résonance magnétique, la fréquence de résonance ne dépend que de l'intensité du champ et non de sa direction. Cependant, la sensibilité de l'appareil, c'est-à-dire l'amplitude du signal détecté est maximale lorsque H_1 et H_0 sont perpendiculaires.

cellule de résonance, la position du centre de l'ampoule par rapport au centre de convergence du système optique et l'intensité de la lumière excitatrice. Une expérimentation systématique est en cours qui permettra d'ajuster ces différents paramètres de façon optimale.

3.3. Source. — Les principales difficultés rencontrées avec les sources commerciales sont dues à

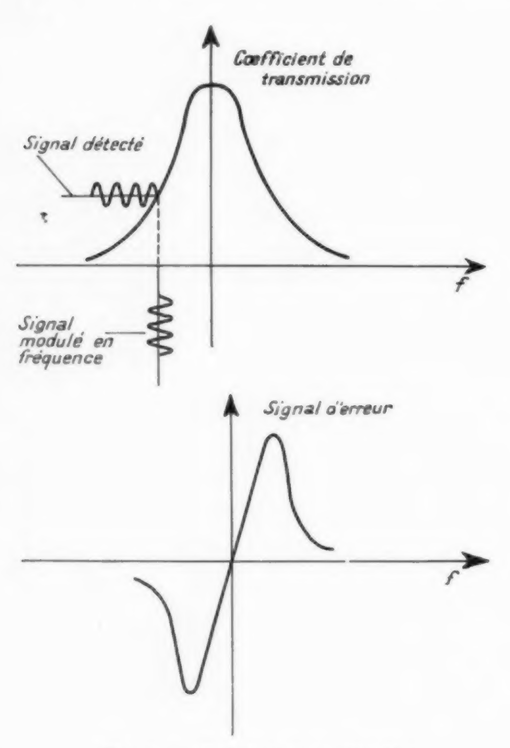


Fig. 4. — Principe de la détection par modulation de fréquence.

l'instabilité de l'intensité lumineuse émise et à la présence d'oscillations de relaxation qui modulent l'émission de lumière. Ces deux phénomènes se traduisent par un bruit de fond élevé sur la cellule photoélectrique. La stabilité de l'intensité est très sensible à la température du milieu environnant et la présence d'électrodes à l'intérieur du tube à décharge favorise l'amorçage des oscillations de relaxation.

Bien que le problème ne soit pas encore définitivement résolu, de grands progrès ont été réalisés vers l'obtention de sources stables en supprimant toute électrode à l'intérieur du tube et en excitant la décharge par un courant de fréquence élevée circulant dans une bobine entourant le tube.

3.4. Cellule de résonance. — La cellule de résonance, en pyrex, contient de la vapeur saturante en équilibre avec le métal sous une pression voisine de 2.10^{-6} mm Hg à la température de l'expérience. Son volume est de 125 cm³ environ.

A la pression de 2.10^{-6} mm Hg le libre parcours moyen est très supérieur au diamètre de l'ampoule et les atomes de césium subissent de nombreuses collisions contre la paroi. Ceci a pour effet de détruire l'orientation produite par le pompage optique, donc d'affaiblir les signaux de résonance. Pour y remédier, on peut, soit ajouter dans la cellule une certaine quantité de gaz rare — par exemple du néon sous une pression de quelques millimètres de Hg —, soit recouvrir la paroi d'une couche très mince de paraffine sur laquelle les atomes rebondissent sans se désorienter [5], [6].

Les deux techniques ont fourni jusqu'à présent des résultats à peu près équivalents.

3.5. Générateur. — Ce générateur, centré à 160 kHz pour un champ $H_0 = 0,5$ Oe est l'élément électronique principal du magnétomètre.

Outre le phénomène de saturation de la raie de résonance, une cause d'élargissement de la raie d'absorption est l'instabilité de fréquence du générateur. En effet, toute modulation parasite de fréquence a pour effet de faire apparaître une bande apparente supérieure à la bande réelle de la transition [7]. C'est cette bande apparente qui est effectivement observée et définit la résolution de la raie. Si le champ magnétique à mesurer était constant, il serait facile de stabiliser le générateur par les moyens habituels. Dans le problème qui nous intéresse, il faut, non seulement moduler la fréquence afin de balayer la raie de résonance et obtenir un signal d'erreur, mais de plus, il est nécessaire que la fréquence d'oscillation suive toute variation même très rapide du champ magnétique.

Les deux conditions, stabilité et possibilité de changement rapide de fréquence, sont naturellement difficiles à satisfaire simultanément et il est indispensable d'apporter un soin particulier à l'étude du générateur afin que la fréquence d'oscillation soit définie par le signal d'erreur à l'exclusion de tout autre paramètre. En particulier, il est bon de rejeter tout système à bascule, dont la fréquence moyenne est bien définie mais non pas la période instantanée. En effet, l'instant du passage du signal au

zéro varie d'une alternance à l'autre et il en résulte une modulation de phase parasite qui élargit le spectre d'émission autour de la fréquence moyenne.

A cause de la dynamique très grande exigée par la plage de champ magnétique à mesurer (de l'ordre de 20 %), la meilleure solution apportée au problème du générateur semble être celle de l'oscillateur contrôlé par tube à réactance. Pour augmenter encore la dynamique, il est possible de recourir à l'emploi de deux générateurs de fréquences différentes et plus élevées et d'utiliser l'oscillation de battement entre les deux fréquences.

Dans cette solution, il est indispensable de placer les deux générateurs dans des conditions identiques, de manière à éviter que les instabilités de chacun d'eux ne s'ajoutent dans le signal de battement final.

4. Performances.

Un magnétomètre de laboratoire a été réalisé conformément aux indications précédentes. Dans les conditions où l'on opère expérimentalement, les composantes Zeeman individuelles ne sont pas résolues. La mesure se fait sur le groupe de transitions $F = 4$ assimilé à une raie unique de largeur 80 Hz environ. Le bruit de fond non magnétique de l'appareillage se situe aux alentours de 0,3 à 0,5 γ (3 à 5.10^{-6}Oe) pour un temps de réponse de 0,2 s environ.

Les performances du magnétomètre ont été comparées à celles d'un appareil Gulf dont la sensibilité est de 1 γ pour une constante de temps de 0,3 s.

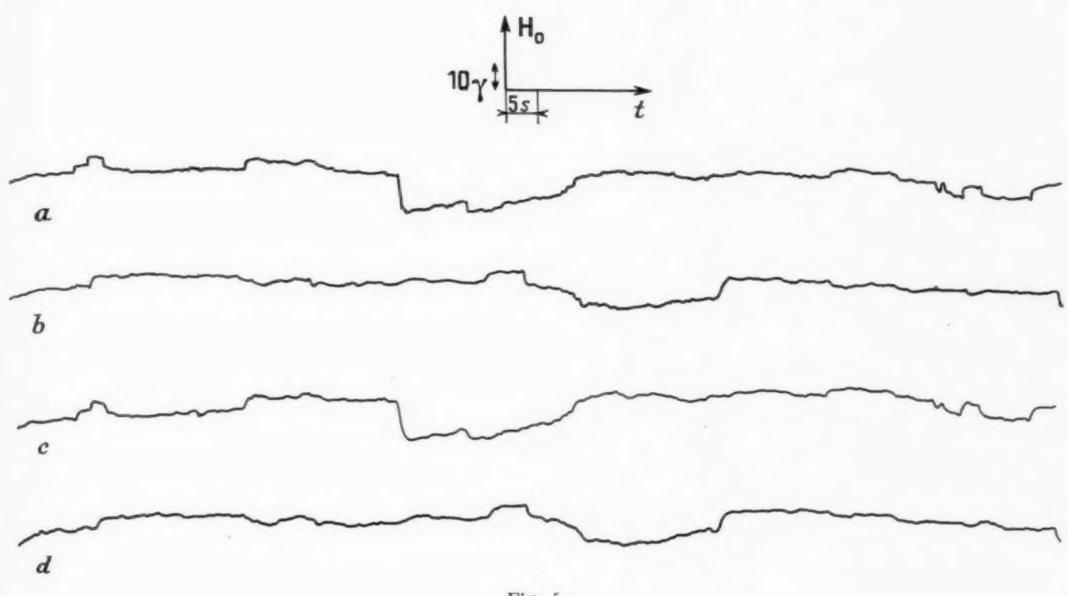


Fig. 5.

a, magnétomètre Gulf n° 1;
b, magnétomètre Gulf n° 2;
c, magnétomètre à césium n° 1;
d, magnétomètre à césium n° 2.

La figure 5 montre l'aspect des enregistrements simultanés obtenus. Les indications des deux magnétomètres coïncident à moins de 1 γ près, mais les petites divergences peuvent être attribuées à l'inhomogénéité du champ local, les deux appareils n'occupant pas exactement la même position géométrique.

Des expériences sont en cours en vue d'améliorer encore ces performances, compte tenu des différents paramètres qu'il est possible d'ajuster, il semble raisonnable d'espérer pour le prototype définitif, une sensibilité de 0,1 γ (10^{-6}Oe) et une constante de temps de 0,1 s.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. P. HEPPNER, *Goddard Space flight Center National Aeronautics and Space Administration* (Reprinted Courtesy of the author and the American Rocket Society).

[2] A. KASTLER, *Quelques suggestions concernant la production optique et la détection optique d'une inégalité de population des niveaux de quantification spatiale des atomes. Application à l'expérience de Stern et Gerlach et à la résonance magnétique* (*J. Phys. Rad.*, t. 11, 1950, p. 255).

[3] I. I. RABI, N. F. RAMSEY et J. SCHWINGER, *Use of Rotating Coordinates in Magnetic Resonance Problems* (*Rev. Mod. Phys.*, t. 26, 1954, p. 167).

[4] H. G. DEHMELT, *Paramagnetic Resonance Reorientation of Atoms and Ions Aligned by electron Impact* (*Phys. Rev.*, t. 103, p. 1125).

[5] R. H. DICKE, *Effect of Collisions upon the Doppler width of Spectral Lines* (*Phys. Rev.*, t. 89, p. 472).

[6] H. G. ROBINSON, E. S. ELSBERG et H. G. DEHMELT, *Preservation of Spin State in Free Atom-Inert Surface Collision* (*Bull. Amer. Phys. Soc.*, t. 3, 1958, p. 9).

[7] J. C. SIMON et L. MALNAR, *Action d'un signal modulé en fréquence sur un quadripôle sélectif* (*Ann. Radioélectr.*, t. 13, n° 51, 1958, p. 18).

INTRODUCTION A L'ANALYSE DES SYSTÈMES ASSERVIS A INFORMATION PULSÉE [1]

Par MM. S. THELLIEZ et J. P. GOUYET.

Sommaire. — *Après avoir défini la classe des systèmes asservis étudiés dans cet article, les auteurs traitent les deux principales opérations d'échantillonnage et de reconstitution de l'information. Ils présentent ensuite de manière logique, la transformation en Z, la transformation inverse et leurs propriétés les plus intéressantes. L'étude de cette transformation permet alors, comme dans le cas des systèmes linéaires, de définir les fonctions de transfert pulsées des principales structures rencontrées pratiquement et cette extension de la notion de fonction de transfert est le sujet du troisième chapitre. Le quatrième chapitre utilisant les bases établies par les trois premiers expose simplement l'analyse de la stabilité absolue de cette famille de systèmes dont l'importance est montrée dans la conclusion.* (C. D. U. : 621.526.)

Summary. — *Having described the class of servo controlled systems examined in this article, the authors deal with the two main sampling and reconstitution operations on the information. They then present in logical form the Z transformation, the inverse transformation and their more interesting properties. As in the case of linear systems, the investigation of this transformation helps to define the pulsed transfer functions of the principal structures encountered in practice, and this extension of the transfer function is the subject of the third chapter. The fourth chapter sets out, on the bases established in the first three chapters, and in simple manner, the analysis of the absolute stability of this family of systems the importance of which is demonstrated in the conclusion.* (U. D. C. : 621.526.)

Inaltsangabe. — *Nachdem die Verfasser die Klasse der in dem Aufsatze betrachteten Servosteuerungen genau definiert haben, behandeln sie die zwei wichtigsten Vorgänge : die Entnahme der Information und die Nachbildung der Information. Sie geben dann eine logische Darstellung der Z-Umformung und der reziproken Umformung, sowie deren interessantesten Eigenschaften. Durch die Untersuchung dieser Umformung ist es möglich genau wie bei linearen Systemen die Impuls-Uebertragungsfunktion der wichtigsten in der Praxis vorkommenden Strukturen zu bestimmen und diese Ausdehnung des Begriffs der Uebergangsfunktionen bildet das Thema des 3. Kapitels. Im 4. Kapitel werden die in den drei ersten ausgelegten Grundsätze dazu verwendet um auf einfache Weise die absolute Stabilität dieser Familie von Systemen zu zeigen, deren Bedeutung zum Schluss noch unterstrichen wird.* (D. K. : 621.526.)

1. INTRODUCTION.

1.1. Généralités.

Comme le démontrait de manière remarquable l'Ingénieur militaire J.-M. Pellegrin à l'avant-dernier symposium d'Atlantic City, le prix de revient d'une calculatrice analogique est sensiblement équivalent à celui d'une calculatrice arithmétique de même importance du point de vue traitement de l'information et c'est tout simplement pour des raisons purement technologiques que croît l'importance prise par des éléments de contrôle digitaux et les techniques d'échantillonnage dans le domaine des systèmes de contrôle. Ces raisons sont nombreuses :

a. Sous la forme de signaux codés ou de nombres arithmétiques, une information échantillonnée peut se transmettre beaucoup plus fidèlement qu'une information du type analogique;

b. L'information échantillonnée sous forme digitale, se met en mémoire très facilement; cela permet

[1] Manuscrit reçu le 29 septembre 1960.

donc une réalisation aisée du programme d'un système de contrôle;

c. Les transducteurs du type digital, maintenant commercialement disponibles sur le marché, possèdent une précision et une résolution difficile à atteindre avec leurs équivalents analogiques;

d. Une seule calculatrice de contrôle, par échantillonnage intercalé peut permettre le contrôle de plusieurs asservissements et, enfin;

e. Les techniques d'échantillonnage permettent d'obtenir un gain élevé en puissance aux dépens de la largeur de bande.

Pourtant, malgré ces avantages, l'étude analytique et synthétique des asservissements à information pulsée est plus complexe. En effet, la théorie des asservissements linéaires n'est plus valable si les grandeurs d'entrée varient sous forme d'impulsions de largeur finie ou non à des instants discrets habituellement également espacés dans le temps. Il est alors nécessaire d'élaborer des nouvelles méthodes d'analyse et de synthèse de ces systèmes en régime transitoire. Cette étude déjà partiellement abordée en 1949 par F.-H. Raymond en France, Lawden en Angleterre, Tsipkin en U. R. S. S., K. Linvill et surtout J. Ragazzini et L. A. Zadeh aux U. S. A. fait actuellement l'objet de nombreuses recherches.

Le lecteur intéressé par ce vaste sujet trouvera en Annexe une liste des articles ayant paru sur les systèmes asservis à information pulsée. Cette liste est longue; il est en effet possible de traiter ce problème, non seulement en utilisant le plan complexe et la notion de fonction de transfert, mais aussi en utilisant la théorie des équations aux différences finies qui régissent tout système à information pulsée.

Le but de cet article qui se limite aux cas où les instants discrets considérés sont également espacés dans le temps n'est pas de faire une mise au point de cette théorie naissante, il est simplement de montrer après quelques rappels et sur quelques exemples l'intérêt de la transformation en *Z* dans l'analyse des systèmes linéaires à informations discontinues.

Nous examinerons pour cela successivement :

1° le problème de l'échantillonnage et de la reconstitution;

2° la transformation en *Z*;

3° les méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes pulsés;

4° quelques exemples d'applications.

2. LE PROBLÈME DE L'ÉCHANTILLONNAGE ET DE LA RECONSTITUTION.

2.1. Le problème de l'échantillonnage.

2.1.1. Généralités. — Si l'on définit de manière générale le terme échantillonnage par la transformation d'une fonction continue du temps en une suite d'unités d'information sur cette fonction arrivant à des instants discrets du temps, le problème de l'échantillonnage et celui de l'opération inverse : la reconstitution, occupe alors une bonne moitié d'un livre sur la modulation et les techniques de conversion analogues-digitales. En effet, suivant la nature du système de contrôle choisi, les formes intermédiaires et finales des signaux qu'on désire manipuler, les unités d'information arrivant à des instants discrets du temps sont généralement obtenues : soit

a. par échantillonnage d'amplitude et conversion en modulation de durée ou comparaison ou lecture directe;

b. par échantillonnage du temps, cette transformation caractérisant les méthodes incrémentales qui sont à la base de la plupart des transducteurs électromécaniques.

Donnons quelques exemples pour illustrer et préciser ces deux grandes familles de transformation d'une fonction continue du temps. Dans le système représenté par la figure 1, une grandeur élec-

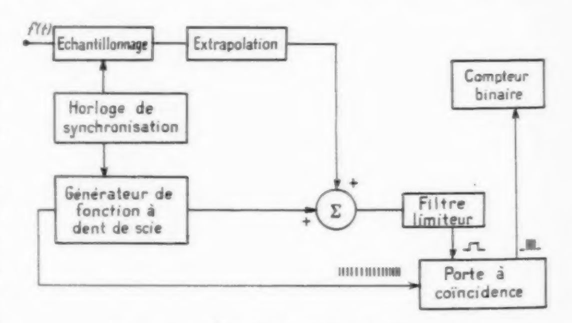


Fig. 1. — Échantillonnage et conversion en modulation de durée.

trique $f(t)$ examinée périodiquement est transformée par un système d'extrapolation maintenant constante et égale à $f_n(t)$ entre les instants t_n et $t_n + 1$, l'amplitude de $f(t)$ (*fig.* 2 *a*). L'addition d'une fonction en dents de scie d'amplitude suffisante, de fréquence fixe et le filtrage de la somme des deux signaux par un générateur de fonction du type

limiteur indiqué par la figure 2 *c* permet d'obtenir le signal de la figure 2 *d*. La largeur de ces ondes carrées contient l'information. Si l'on utilise ces signaux pour contrôler une porte à coïncidence dont la seconde entrée est la sortie d'un oscillateur de fréquence fixe plus élevée que la fréquence des

Fig. 2.

dents de scie, l'information est maintenant représentée par un nombre d'impulsions qu'on peut aisément transformer en un nombre binaire par simple

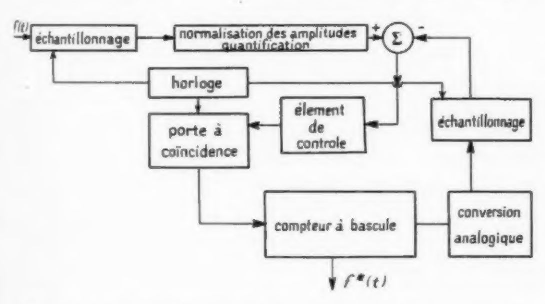


Fig. 3. — Échantillonnage d'amplitude et comparaison.

passage dans un compteur à bistables. Ce système est du type *a*, il permet des opérations aisées mais peu rapides sur l'information.

Dans le système représenté par la figure 3 la fonction du temps *f* (*t*) module un train d'impulsions unités. Les amplitudes des impulsions obtenues sont normalisées par un quantificateur et servent de grandeurs d'entrée à un ensemble bouclé qui fonctionne comme suit. Un organe de comparaison examine l'échantillon d'entrée et la sortie analogue d'un compteur binaire. L'erreur entre ces deux grandeurs est mesurée; elle agit sur un circuit contrôlant l'état de ce compteur. Quand le nombre inscrit dans ce compteur en binaire est égal à l'échantillon d'entrée, l'erreur est nulle et le circuit de contrôle n'agit plus. L'amplitude de l'échantillon de la grandeur d'entrée est alors représentée par le nombre binaire caractérisant l'état du compteur. Il suffit donc de vider ce compteur pour acheminer, par exemple, l'information vers une autre partie du calculateur. Ce système est du type *a*, l'unité d'information est lue par comparaison.

Pour obtenir une lecture directe, il suffit, par exemple, d'appliquer la fonction *f* (*t*) quantifiée aux plaques de déflection verticale d'une lampe permettant la déviation d'un faisceau d'électrons (*fig* 4)

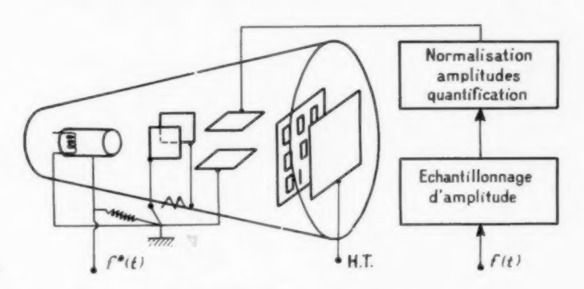


Fig. 4. — Échantillonnage et comparaison directe.

comme les ingénieurs de la Bell Telephone l'ont réalisé. Le condensateur horizontal est alimenté à ses bornes par une tension alternative de balayage d'amplitude suffisante de manière à venir faire couvrir au faisceau la largeur d'un cache interposé entre l'anode et la cathode. Cet écran possède des ouvertures rectangulaires qui, suivant la déflection verticale du faisceau, laisseront passer des électrons changeant ainsi le courant du circuit plaque qui devient pulsé. L'amplitude de la fonction *f* (*t*) est dans ce système transformée directement en une information de forme binaire. Ce système est du type *a*, sa réponse fréquentielle est très grande.

Dans le dispositif de la figure 5, la vitesse d'un axe mécanique *v* (*t*) est mesurée à l'aide d'un disque centré sur cet axe. Ce disque possède un trou et il sépare une petite lampe à incandescence d'un phototransistor correctement orienté. A chaque passage du trou, la couche sensible du photo-transistor reçoit un paquet d'énergie de la lampe et l'on peut donc obtenir un train d'impulsion du circuit collec-

teur du transistor. La distance entre deux impulsions est égale à l'inverse de la vitesse moyenne du disque sur un tour. On obtient bien ainsi un échantillonnage de la fonction continue $v(t)$. Cet échantillonnage est temporellement apériodique, il donne une valeur moyenne par tour de la fonction $v(t)$. Il est, de plus, incrémental car le nombre d'impulsions enregistré par exemple dans une mémoire

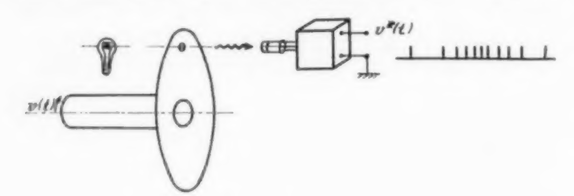


Fig. 5. — Échantillonnage du temps.

correspond à un nombre de tours, soit l'intégrale de la fonction $v(t)$.

La vitesse $v(t)$ est donc échantillonnée apériodiquement par un échantillonnage du temps, l'amplitude des échantillons est en effet inversement proportionnelle à des temps d'arrivée de signaux

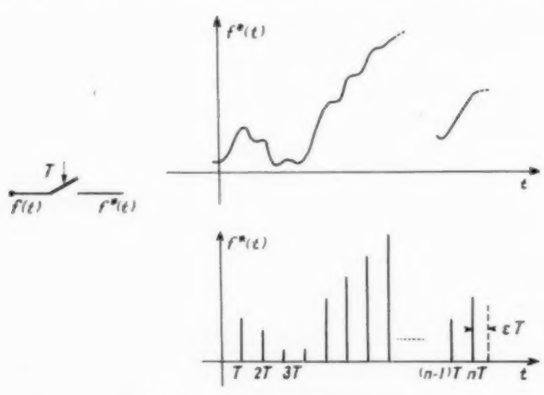


Fig. 6. — L'échantillonnage.

identiques. Ce système est du type *b*, il est très simple mais donne pratiquement une information peu facile à manier.

Ces deux classes d'échantillonnage sont très différentes. Elles possèdent avec quelques restrictions sur la deuxième famille, pourtant en commun, la propriété fondamentale de fournir une unité d'information dans chaque échantillon pris de manière périodique ou apériodique.

Quelle que soit la forme de l'information, nombre binaire, distance entre deux impulsions il est donc possible de représenter symboliquement l'opération d'échantillonnage par un interrupteur comme le montre la figure 6. T est la période d'échantillonnage si celui-ci est périodique. La fonction $f^*(t)$ dénote le résultat de la fonction $f(t)$ échantillonnée, les largeurs habituelles des impulsions d'échantillonnage étant négligeables par rapport à la période T.

Les systèmes asservis possédant des éléments de puissance qui sont du type analogique et fonctionnent correctement par le contrôle de grandeurs

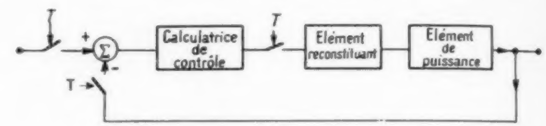


Fig. 7. — Structure habituelle des asservissements à information pulsée.

continues, il est donc nécessaire après le traitement de l'information pulsée par une calculatrice du type arithmétique d'effectuer une reconstitution de fonctions $f(t)$ à partir d'impulsions $f^*(t)$.

La forme classique d'un asservissement à information pulsée est donnée par la figure 7, qui se réduit symboliquement à la figure 8. De cette structure,

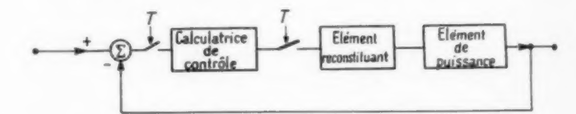


Fig. 8. — Structure habituelle des asservissements à information pulsée.

il est facile de déduire que deux opérations importantes seront communes à tous les systèmes de cette nature : l'opération d'échantillonnage et la reconstitution que nous allons maintenant examiner.

2.1.2. Perte d'information et échantillonnage. — Le bruit présent dans tout signal est une fonction aléatoire du temps. Au spectre de fréquences du signal contenant l'information s'ajoute donc le spectre de fréquences continu du bruit qui limite la quantité d'information contenue dans ce signal. Du point de vue de l'ingénieur, les fonctions du temps, grandeurs d'entrée des systèmes qu'il étudie, sont donc des fonctions au spectre de fréquence limité. De plus, dans notre cas particulier, les systèmes asservis rencontrés pratiquement peuvent, si l'on examine leurs fonctions de transfert isochrones, s'assimiler bien souvent à des filtres passe-bas. Il est donc logique dans une première étude

de supposer que leurs signaux d'entrée possèdent un spectre de fréquences limité $F(\omega)$ du type indiqué par la figure 9. Cette hypothèse étant faite, il apparaît alors intuitivement que si la période d'échantillonnage est plus petite que la demi-période de la plus grande fréquence du spectre de $F(\omega)$, il ne peut se produire de changement brusque de la fonction $f(t)$ entre deux instants consécutifs d'échantillonnage. La transformation s'effectue dans ce cas théoriquement sans aucune perte d'information. Cette importante propriété déjà entrevue par Auguste-Louis Cauchy en 1841, redémontrée plus tard par Whittaker dans une étude sur l'interpolation et appliquée par Nyquist, Gabor, Shannon se démontre assez facilement.

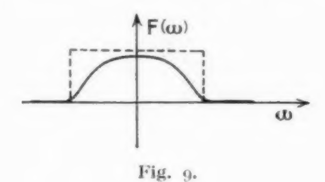


Fig. 9.

La fonction du temps de spectre $F(\omega)$ peut s'écrire

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega,$$

mais $F(\omega)$ par hypothèse est tel que

$$F(\omega) = 0 \qquad \text{pour} \quad \omega > \frac{2\pi}{T_c}, \qquad \omega < -\frac{2\pi}{T_c};$$

la fonction $f(t)$ égale donc

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{T_c}}^{\frac{2\pi}{T_c}} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

où, si l'on examine plus particulièrement $f(t)$ aux instants d'échantillonnage $t = \frac{n}{2} T_c$,

$$(1) \quad f\left(\frac{nT_c}{2}\right) = f^*\left(\frac{nT_c}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{T_c}}^{+\frac{2\pi}{T_c}} F(\omega)\, e^{\frac{j\omega n T_c}{2}}\, d\omega.$$

Comme $F(\omega)$ est une fonction de ω qui satisfait aux conditions de Dirichlet, elle peut donc s'écrire sous la forme d'une série de Fourier dont les coefficients α_n sont donnés par

$$(2) \qquad \alpha_n = \frac{T_c}{4\pi}\int_{-\frac{2\pi}{T_c}}^{+\frac{2\pi}{T_c}} F(\omega)\, e^{-\frac{j\omega n T_c}{2}}\, d\omega.$$

Si l'on compare maintenant les relations (1) et (2) qui lient $f^*\left(\frac{nT_c}{2}\right)$ à α_n il est possible d'écrire

$$\alpha_n = \frac{T_c}{2} f\left(-\frac{nT_c}{2}\right).$$

La fonction $f^*(t)$ détermine de manière unique $F(\omega)$ et $f(t)$ peut être reconstruit de manière unique à partir de son spectre $F(\omega)$. Il est donc possible d'énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Toute fonction du temps $f(t)$ possédant un spectre de fréquence limitée à $\pm\frac{1}{T_c}$ peut être transformée par échantillonnage périodique de période inférieure ou égale à $\frac{T_c}{2}$ sans aucune perte d'information.*

Illustrons par un exemple simple cet important théorème : si l'on considère les fonctions de temps $f_\alpha(t)$ et $f_\beta(t)$ données par

$$f_\alpha(t) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{T} + \varepsilon\right)t + \varphi\right],$$

$$f_\beta(t) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{T} - \varepsilon\right)t + \varphi\right]$$

et représentées par la figure 10 et si l'on échantillonne ces fonctions aux instants $-2T$, $-T$, 0, T, $2T$, ..., on obtient

$$f_\alpha(nT) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{T} + \varepsilon\right)nT + \varphi\right]$$

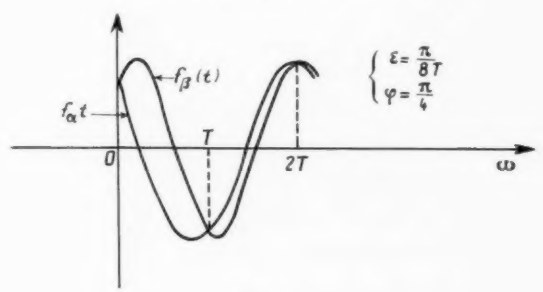


Fig. 10.

où n est entier, qui peut s'écrire

$$f_\alpha(nT) = \cos[n\pi + \varepsilon nT + \varphi].$$

La fonction cosinus est une fonction paire de période égale à 2π

$$\begin{aligned} f_\alpha(nT) &= \cos[n\pi + \varepsilon nT + \varphi] \\ &= \cos[2\pi n - (nT + \varepsilon nT + \varphi)]. \end{aligned}$$

soit par réduction,

$$f_\alpha(nT) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{T} - \varepsilon\right) nT - \varphi\right]$$

qui est précisément égal à $f_\beta\,(nT)$. Or, comme le montre la figure 10, ces fonctions sont différentes. L'échantillonnage de période T n'est donc pas suffisant pour définir de manière unique par ses échantillons la fonction $f_\alpha\,(t)$ par exemple, car le spectre de cette fonction n'est pas compris entre $\pm\frac{2\pi}{T_e}$. On vérifiera aisément qu'un échantillonnage de période $\frac{T}{2}$ permettrait de définir uniquement les deux fonctions $f_\alpha(t)$ et $f_\beta(t)$ à partir de leurs échantillons.

Sans vouloir à ce point aborder le problème de la reconstitution sujet d'un paragraphe suivant, montrons pourtant qu'une fonction $f\,(t)$ échantillonnée correctement se reconstruit graphiquement assez simplement.

La sortie $f^*\,(t)$ de l'échantillonneur (*fig.* 3) s'écrit, si l'on considère le procédé d'échantillonnage comme une modulation dans le temps par un train d'impulsions unités,

$$f^*(t) = f(t) \times (\text{train d'impulsions unités}),$$

soit, en examinant l'aspect série de Fourier du train d'impulsions,

$$f^*(t) = f(t) \times \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{jn\Omega t}.$$

Le spectre $F^*(\omega)$ de $f^*(t)$ se compose donc du spectre de $F\,(\omega)$ répété périodiquement comme le montre

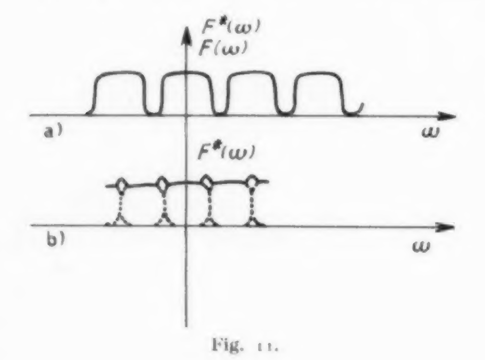


Fig. 11.

la figure 11. Si la période de l'échantillonnage est mal choisie et qu'elle est supérieure à $\frac{T_e}{2} = \frac{\pi}{\Omega}$, ces différents spectres sont confondus (*fig.* 11 *b*).

Si la période de l'échantillonnage est bien choisie, $F\,(\omega)$ peut être retrouvé. La reconstitution de $F\,(\omega)$ se faisant par le filtrage de $F^*\,(\omega)$ à travers un filtre de bande passante $\pm\,\Omega$ et d'amplitude unité. La réponse impulsionnelle de ce filtre représenté par la figure 12 est égale à $\frac{\sin 2\pi t}{2\pi t}$. Si l'on définit

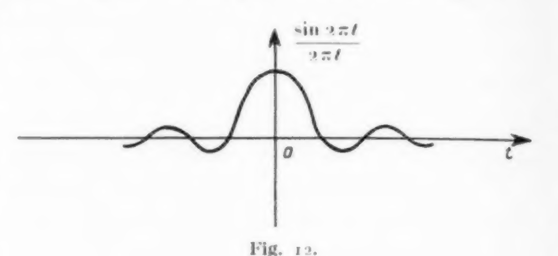


Fig. 12.

alors de manière générale une fonction de composition $C_n\,(t)$ telle que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(nT)\,C_n(t)$$

on obtient simplement dans le cas considéré

$$C_n(t) = \frac{\sin 2\pi\left(t - \frac{nT_e}{2}\right)}{2\pi\left(t - \frac{nT_e}{2}\right)}.$$

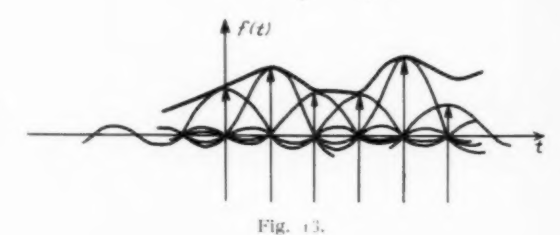


Fig. 13.

Cette fonction de composition permet de reconstituer complètement et ceci de manière unique la fonction $f\,(t)$ comme l'indique la figure 13. Il est nécessaire pourtant de remarquer que l'extrapolation obtenue graphiquement n'est pas physiquement réalisable. Ce résultat sera utilisé au paragraphe suivant.

L'hypothèse sur l'allure passe-bas du spectre de fréquence de la fonction $f\,(t)$ sur laquelle est basée le théorème 1 conduit, si la fonction à échantillonner est limitée entre les fréquences f_1 et $f_1 + \frac{1}{T_e}$ pour des raisons de rapport signal-bruit à choisir une fréquence d'échantillonnage très grande si nous la

comparons à la largeur de bande intéressante. En fait, l'ensemble des échantillons obtenus par cette transformation est bien souvent redondant. Il est, en effet, possible de montrer que si le signal d'entrée est, par exemple, le résultat filtré d'une modulation d'amplitude ou même s'il est composé de quelques régions isolées de l'axe des fréquences, un échantillonnage convenablement choisi et de période supérieure à celle établie par le théorème 1 conserve théoriquement toute l'information contenue dans la grandeur d'entrée. Ce théorème démontré par Kohlenberg a toutefois peu de signification pratique, les signaux rencontrés habituellement ayant rarement des spectres de fréquence de ce type.

Le théorème 1, démontré dans le cas particulier de l'échantillonnage direct d'une fonction du temps est encore valide pour tout échantillonnage de la première famille. Pratiquement, après échantillonnage et avant l'utilisation dans un calculateur de l'information pulsée, on effectue une normalisation des amplitudes de l'information d'entrée. Cette transformation de quantification introduit un bruit et une perte d'information qu'il est possible d'étudier de manière statistique. Nous n'étudierons pas cette transformation de l'information en renvoyant le lecteur aux Ouvrages spécialisés pour aborder le principal sujet de cet article qui est la transformation en Z.

2.2. L'échantillonnage est une modulation.

La durée de l'échantillon étant petite par rapport à la période de l'échantillonnage T, représenté symboliquement par la figure 14 si $d(t)$ représente

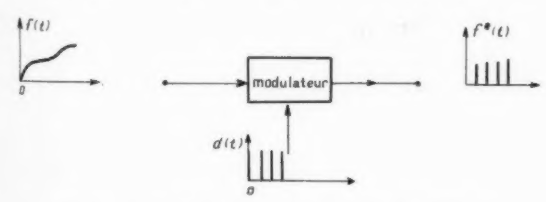


Fig. 14. — L'échantillonnage est une modulation.

le train d'impulsions unité apparaissant toutes les T secondes, la transformée $f^*(t)$ de $f(t)$ s'écrit

$$f^*(t) = f(t)\,\mathrm{d}(t).$$

On obtient donc une modulation d'amplitude, le signal d'entrée (*fig.* 14) étant $d(t)$

$$(3) \qquad f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,\delta(t - nT).$$

Un examen en fréquence semble intéressant. La relation (3) donne, si nous prenons la transformée de Laplace de chaque côté du signe égal;

$$F^*(p) = F(p) \cap D(p),$$

le signe $\cap$ indiquant un produit de composition, mais $D(p)$ est de la forme

$$1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + \ldots = \frac{1}{1 - e^{-Tp}};$$

cette fonction possède une infinité de poles simples à

$$p = jn\frac{2\pi}{T},$$

où n est un entier, positif ou négatif, le résidu à chaque pôle étant égal à $\frac{1}{T}$.

On arrive donc à l'expression

$$F^*(p) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(p + jn\frac{2\pi}{T}\right),$$

d'où la conclusion importante : du fait que l'échantillonnage est une modulation d'amplitude, $F(p)$ est

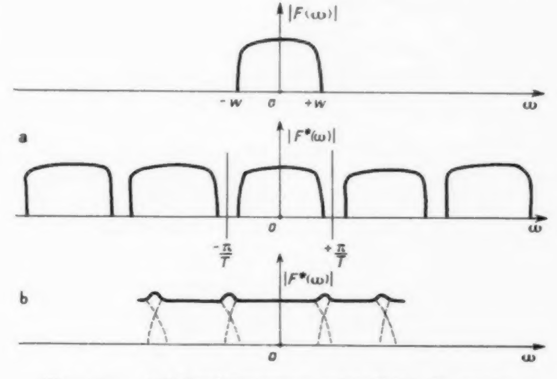


Fig. 15. — L'échantillonnage : périodicité du spectre.
a. Fréquence correcte;
b. Fréquence trop basse : perte d'information.

périodique de période $\frac{2\pi}{T} = \Omega$; Ω : pulsation d'échantillonnage. Le spectre de $F^*(j\omega)$ reproduit le spectre de $F(j\omega)$ si la fréquence d'échantillonnage est correcte comme le montre la figure 15. Ces propriétés seront reprises plus tard dans l'étude de la transformation en Z.

La conversion d'une fonction continue en nombres arithmétiques arrivant à des instants discrets, ayant été obtenue par un système de relais, de

portes purement électroniques (*fig.* 16) et l'élément de puissance d'un asservissement étant généralement de nature analogique, il est nécessaire de retransformer cette information digitale sous forme analogique après certaines corrections effectuées par une calculatrice de contrôle, par exemple (*fig.* 8). On aborde alors le problème de la reconstitution.

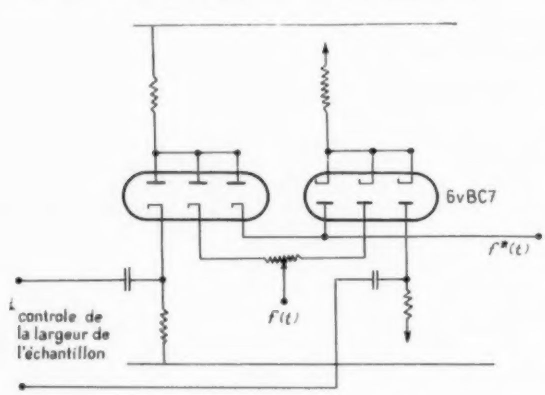


Fig. 16. — Porte à six diodes permettant un échantillonnage à 100 Hz.

2.3. Le problème de la reconstitution.

Étant donné les valeurs à des instants discrets (*fig.* 17) (instants d'échantillonnage) 0, T, $2T$, $3T$, ..., nT d'une fonction continue, mais inconnue $f(t)$,

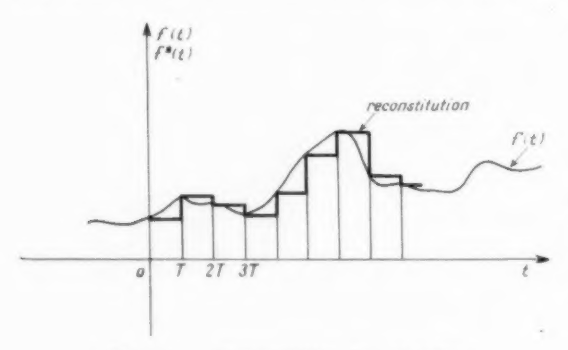


Fig. 17. — Extrapolation du 1er ordre.

comment reconstituer, et ceci physiquement par un procédé électronique, électromécanique, etc. cette fonction aussi rigoureusement que possible ? La période de l'échantillonnage ayant été déterminée par l'application du théorème de Shannon après une approximation du spectre de fréquence de $f(t)$.

Aux instants $(n+\varepsilon)T$, où $0 \leq \varepsilon < 1$, la valeur de l'échantillonnage $f(n+1)T$ est inconnue. Il apparaît donc nécessaire, si nous voulons reconstituer $f(t)$, de faire une estimation sur $f(n+1)T$ et sur l'allure de la courbe $f(t)$ entre les instants d'échantillonnage nT et $(n+1)T$. Cette estimation, qui est essentiellement une extrapolation physique (dans le sens de physiquement réalisable) peut s'effectuer de manière arbitraire. Logiquement, elle doit tenir compte du passé de $f^*(t)$, c'est-à-dire des valeurs précédentes des échantillons qui caractérisent l'allure et les variations de $f(t)$. L'élément de reconstitution, que nous appellerons un extrapolateur, effectuera donc une prédiction basée sur un passé défini des valeurs d'échantillonnage, sa mémoire étant finie.

Un extrapolateur étant construit, sa précision de reconstitution pourra être évaluée, par exemple par une comparaison dans le temps de sa réponse à une fonction $f^*(t)$ provenant d'une fonction $f(t)$ de référence, spécialement choisie et échantillonnée; ou, si nous considérons l'aspect filtre linéaire de l'extrapolateur, par une étude comparative des spectres de fréquence de $f(t)$ et de sa reconstitution.

Toutes les extrapolations mathématiques expérimentalement réalisables sont valables. Nous n'examinerons pourtant que le premier des trois procédés habituels suivant d'extrapolation et ses performances :

a. l'extrapolation polynomiale de Gregory-Newton;

b. l'extrapolation polynomiale de Porter et Stonesman;

c. l'extrapolation par un réseau.

2.3.1. L'extrapolation polynomiale de Gregory-Newton.

— Classique en analyse numérique, l'extrapolation de Gregory-Newton est essentiellement basée sur l'expansion polynomiale de $f(t)$ entre deux instants consécutifs quelconques d'échantillonnage t_n et t_{n+1}, par exemple. La fonction $f(t)$ s'écrit alors

$$f(t) = f(nT) + \frac{f'(nT)}{1!}\tau + \frac{f''(nT)}{2!}\tau^2 + \ldots$$

où, par définition,

$$\tau = t - nT, \quad \text{avec} \quad 0 < \tau < T$$

[les fonctions f', f'', ... représentant les valeurs des dérivées successives de $f(t)$ à l'instant d'échantillonnage $t = nT$]. Les valeurs exactes de ces dérivées sont seulement accessibles par les valeurs passées des échantillons et, de ce fait, il est nécessaire

d'évaluer les dérivées en utilisant des différences finies

$$f'(nT) = \frac{1}{T}[f(nT) - f(n-1)T],$$

$$f''(nT) = \frac{1}{T}[f'(nT) - f'(n-1)T]$$

$$= \frac{1}{T^2}[f(nT) - 2f(n-1)T + f(n-2)T].$$

La fonction $f(t)$ à l'instant $nT + \tau$, peut donc s'évaluer par la série au nombre de termes infini

$$f(nT+\tau) = f(nT) + \frac{\tau}{T}[f(nT) - f(n-1)T]$$
$$+ \frac{\tau^2}{2!\,T^2}[f(nT) - 2f(n-1)T + f(n-2)T] + \ldots,$$

où chaque terme est une différence finie, parfaitement déterminée par les valeurs passées des échantillons. L'extrapolateur, devant avoir une mémoire finie, il est nécessaire de transformer cette série infinie en une série finie. Dans le cas le plus simple, si nous négligeons tous les termes supérieurs au premier terme nous obtenons

$$(4) \qquad f(nT+\tau) = f(nT).$$

L'extrapolateur a une mémoire limitée à un coefficient; il maintient constant le dernier échantillon entre deux instants d'échantillonnage, comme le montre la figure 17.

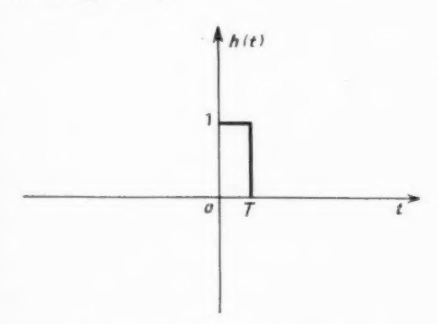


Fig. 18. — Réponse impulsionnelle de l'extrapolateur de 1er ordre.

L'équation (4) permet de déterminer la réponse impulsionnelle (*fig.* 18) de cet extrapolateur, qu'on désignera désormais par *extrapolateur d'ordre* 0. Cette réponse impulsionnelle est facilement décomposée en une différence d'échelons unité et comme la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle d'un système est la fonction de transfert de ce système, on a simplement, $I_0(p)$ étant la fonction de transfert de l'extrapolateur d'ordre 0 (par définition),

$$I_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} = \frac{1 - Z^{-1}}{p} \qquad \text{si} \quad Z = e^{pT}.$$

Étudions la qualité de l'extrapolation d'ordre 0 en considérant l'aspect filtre de l'extrapolateur, la fonction de transfert isochrone de ce système peut s'écrire

$$I_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

qui, sous forme plus commode pour l'étude du module et de la phase, devient

$$I_0(j\omega) = \frac{T}{2} e^{-\frac{j\omega T}{2}} \left[\frac{e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}}}{\frac{j\omega T}{2}} \right],$$

ce qui est égal à

$$I_0(j\omega) = T \left[\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right] e^{-\frac{j\omega T}{2}}.$$

Le module de $e^{-j\omega\frac{T}{2}}$ étant égal à l'unité

$$|I_0(j\omega)| = T \left[\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right],$$

une comparaison graphique de la courbe $T \left[\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right]$ en fonction de ω et de la courbe $|I_f(j\omega)|$ (extrapolateur idéal), montre clairement l'imperfection de cet extrapolateur d'ordre 0. Il est logique, dans le

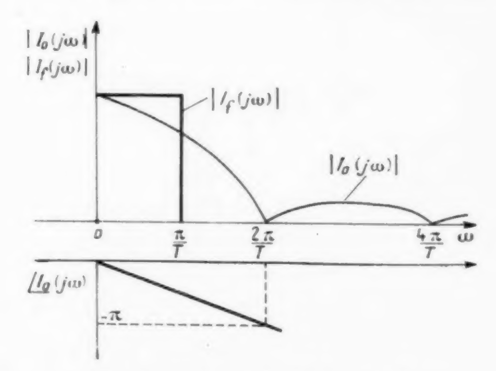


Fig. 19. — Comparaison graphique des modules de $I_0(j\omega)$ et $I_f(j\omega)$.

but d'obtenir une reconstitution plus complète de la fonction $f(t)$, d'effectuer maintenant une meilleure approximation de celle-ci.

Prenons donc les deux premiers termes de la série infinie définissant $f(t)$, on a

$$f(nT+\tau) = f(nT) + \frac{\tau}{T}[f(nT) - f(n-1)T]. \qquad (5)$$

L'extrapolateur effectue, dans ce cas, à l'aide de deux valeurs consécutives d'échantillonnage, des évaluations de la dérivée première de $f(t)$. La reconstitution s'obtient graphiquement très aisément (*fig.* 20), mais physiquement le système se complique ; il doit maintenant posséder une mémoire de deux coefficients.

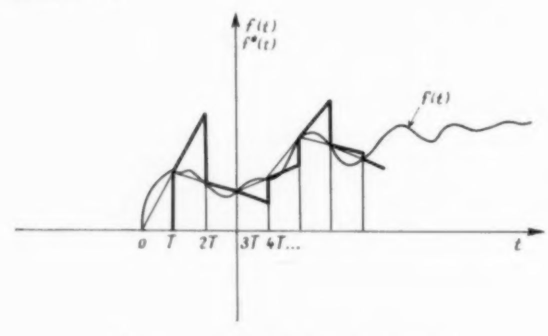


Fig. 20. — Extrapolation du 2e ordre.

La relation (2), formule de récurrence, permet de calculer la réponse impulsionnelle $h(t)$ (*fig.* 21) de cet extrapolateur du 1er ordre. Sa transformée de

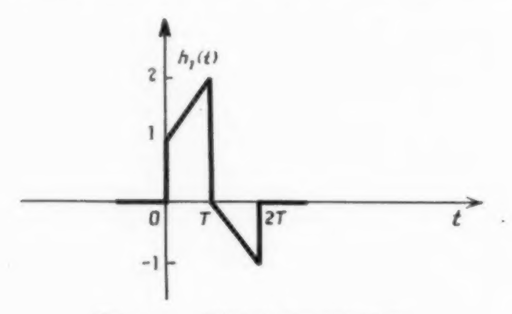


Fig. 21. — Réponse impulsionnelle de l'extrapolateur du 2e ordre.

Laplace, qu'on désignera par $I_1(p)$, est la fonction de transfert de l'extrapolateur. Elle est égale à

$$\mathcal{L}[h_1(t)] = I_1(p) = T(1+Tp)\left[\frac{1-e^{-Tp}}{Tp}\right]^2.$$

Utilisant ce résultat, il est facile de calculer la fonction de transfert isochrone du système, qui peut s'écrire après transformation

$$I_1(j\omega) = T\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}(1+j\omega T)\,e^{-j\omega T},$$

le module et la phase de $I_1(j\omega)$ valent donc respectivement

$$|I_1(j\omega)| = T\sqrt{1+\omega^2T^2}\,\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\,T$$

et

$$\text{Arg}\, I_1(j\omega) = -\omega T + \text{cotg}\,\omega T.$$

La comparaison graphique de ces deux valeurs et des valeurs correspondantes de $I_f(j\omega)$ en fonction de ω (*fig.* 22) montre l'imperfection de l'extrapolateur d'ordre 1 et sa tendance à l'instabilité. Pourtant, une combinaison judicieuse des courbes $|I_0(j\omega)|$ et $|I_1(j\omega)|$ semble intéressante dans

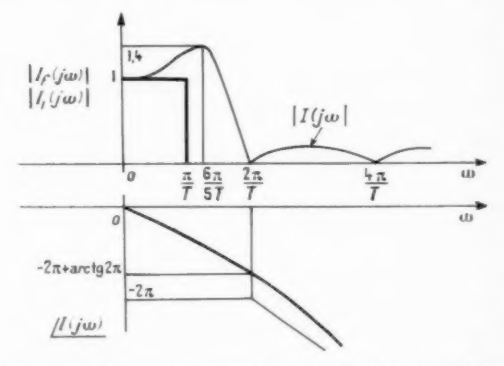


Fig. 22. — Comparaison graphique de $I_f(j\omega)$ et de $I_1(j\omega)$.

l'approximation de la courbe $|I_f(j\omega)|$ et c'est pourquoi il est normal d'évaluer approximativement $f(t)$ entre les points nT et $(n+1)T$ par la formule de récurrence

$$f(nT+\tau) = f(nT) + k\frac{\tau}{T}[f(nT) - f(n-1)T], \qquad (6)$$

où k est un coefficient de pondération compris entre 0 et 1.

Déterminée aisément à l'aide de la relation (6), la réponse impulsionnelle (*fig.* 23) de cet extrapolateur permet, comme dans les deux cas précédents, de calculer : la fonction de transfert $I_{ok}(p)$,

la phase, et le module de la fonction de transfert isochrone $I_{0k}(j\omega)$. On a

$$I_{0k}(p) = \frac{1-e^{-Tp}}{p} - \frac{1-e^{-pT}}{p}\, k\, e^{-pT} + k\,T\left[\frac{1-e^{-pT}}{Tp}\right]^2$$

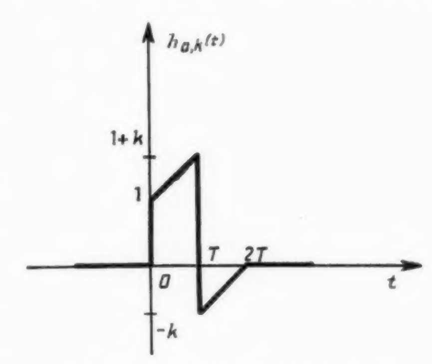


Fig. 23. — Réponse impulsionnelle de l'extrapolateur à vélocité partielle.

et, après quelques transformations commodes pour le tracé du module et de la phase,

$$I_{0k}(j\omega) = T\left[\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right] \times \left[1 + k\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\cos\frac{\omega T}{2} - \cos\omega T\right) + j\sin\frac{\omega T}{2} \times \left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} + 2\cos\frac{\omega T}{2}\right)\right] e^{-\frac{j\omega T}{2}}.$$

Les tracés comparatifs de $|I_{0k}(j\omega)|$, $|I_f(j\omega)|$ et de leur phase (*fig.* 24), k variant de 0 à 1, montrent que la valeur optimale de k est comprise entre 0,32 et 0,31. Une excellente reconstitution de $f(t)$ sera donc réalisée par l'extrapolateur, dont la fonction de transfert est

$$I_{0,32}(p) = \frac{1-e^{-Tp}}{p} - 0{,}32\,\frac{1-e^{-pT}}{p} + 0{,}32\,T\left[\frac{1-e^{-pT}}{Tp}\right]^2;$$

elle peut être obtenue simplement par un réseau actif de Slansky. Les extrapolateurs d'ordre α pour $\alpha > 2$, obtenus en prenant les α premiers termes de la série définissant $f(t)$ entre deux valeurs consécutives d'échantillonnage, sont pratiquement sans intérêt. Leur mémoire doit être de α termes, ce qui implique un système très complexe, de plus ils introduisent un retard de phase croissant avec n. Incorporés dans un système de contrôle à boucle fermée, ils introduisent une tendance à l'instabilité et sont donc indésirables. Un exemple pratique de réalisation du premier système de cette famille d'extrapolateurs à boucle ouverte est donné par la figure 16.

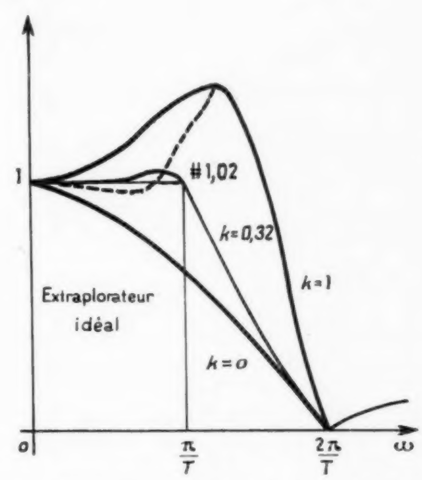


Fig. 24. — Tracé comparatif de $|I_{0k}(j\omega)|$ et de $|I_f(j\omega)|$.

3. LA TRANSFORMATION EN Z.

3.1. Introduction à la transformation en Z.

L'échantillonnage par des impulsions peut être considéré comme une modulation en amplitude telle que l'indique la figure 25. Le signal de sortie s'exprime par

$$(7) \qquad f^*(t) = f(t)\,\delta_T(t).$$

Fig. 25. — Modulation d'amplitude par impulsions.

$\delta_T(t)$ étant l'opérateur de la modulation d'amplitude par les impulsions. On peut exprimer facilement $\delta_T(t)$ si l'on considère des impulsions de largeur infiniment petite et d'amplitude grande, tel que le produit des deux, représentant la surface de l'impulsion, soit égal à l'unité. L'utilisation de ce concept mathématique est très proche de la réalité

quand la largeur t_0 de l'impulsion est très petite devant les constantes de temps du système étudié [2]. La représentation graphique d'une série de telles impulsions par des segments de longueur unité, se rattache à la notion de surface de l'impulsion, qui elle, subit le processus de modulation. De telles impulsions s'indiquent par la fonction $\delta(T)$ ou fonction de Dirac dont la surface est égale à l'unité seulement à l'instant $t = \tau$ et nulle à tout autre instant. L'opérateur $\delta_T(t)$ peut s'écrire

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

et l'expression de la modulation devient

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\delta(t - nT).$$

$f(nT)$ indiquant la valeur de $f(t)$ aux instants nT. La transposition de cette expression dans le plan complexe, ou des fréquences, par une transformation de Laplace bien connue, donne

$$(8) \qquad F^*(p) = \mathcal{L}[f(t)\,\delta_T(t)] = \mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,\delta(t - nT)\right],$$

puisque

$$f(nT) = 0 \quad \text{pour} \quad n < 0$$

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,e^{-npT}.$$

$F^*(p)$ étant la fonction complexe du signal pulsé. Cette fonction est donc une série infinie de termes exponentiels e^{-npT} ayant pour coefficients l'amplitude dans le domaine temporel du signal aux différents instants d'échantillonnage. D'une façon plus imagée, chaque impulsion modulée est transposée séparément dans le domaine complexe où son amplitude peut être individualisée. Cette propriété est très utile dans l'étude de la transformation inverse.

Si, au lieu d'appliquer immédiatement la transformation de Laplace à l'opérateur, celui-ci est décomposé à l'aide de la série de Fourier, on obtient

$$A_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \delta(t)\,dt = \frac{1}{T},$$

A_n, coefficient de $e^{jn\Omega t}$ du développement en série de Fourier de $\delta_T(t)$,

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t}.$$

La transformation de Laplace est ensuite utilisée

$$F^*(p) = \mathcal{L}[f^*(t)]$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega t}\, e^{-pt}\,dt$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-(p-jn\Omega)t}\,dt$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(p - jn\Omega).$$

si $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$.

Cette formule traduit l'élargissement et la périodicité du spectre des fréquences. Cette périodicité apparaît dans le plan complexe, par une infinité de pôles espacés verticalement de $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ et ayant même partie réelle que chaque pôle de la fonction $F(p)$ auxquels ils correspondent. Par exemple, la fonction

$$F(p) = \frac{1}{p + a}$$

correspondant à un affaiblissement exponentiel dans le temps et ayant un pôle simple à $p = -a$ dans le plan complexe p, devient en régime pulsé

$$F^*(p) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{p + a + jn\Omega}$$

dont les pôles sont tous situés sur une verticale d'abscisse $p = -a$ comme indiqué sur la figure 26 *b*.

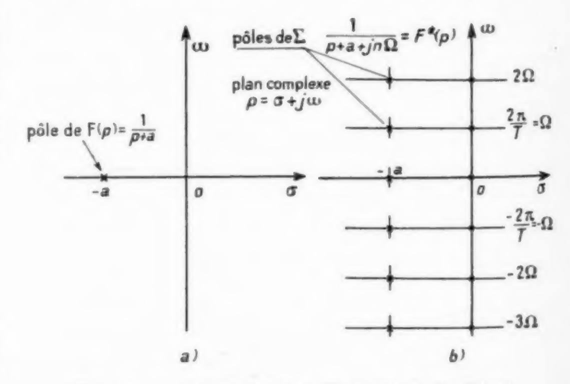


Fig. 26. — Représentation de $F(p)$ et de $F^*(p)$ dans le plan complexe p.

([2]) De nombreux auteurs ont proposé des méthodes d'approximation ou des transformations plus compliquées pour tenir compte d'une largeur non négligeable des impulsions de modulation.

L'échantillonnage a donc pour effet de translater d'une valeur $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ une infinité de fois dans le sens des j positifs et des j négatifs l'ensemble des pôles de $F(p)$ situés dans la bande du plan complexe définie par

$$|j\omega| \leq j\frac{\pi}{T}.$$

Les pôles de cette portion du plan sont disposés symétriquement par rapport à l'axe réel. Cette symétrie est maintenue par rapport aux lignes d'ordonnée

$$\pm\frac{2\pi}{T}n \quad \text{et} \quad \pm\left(\frac{\pi}{T} + n\frac{2\pi}{T}\right)$$

comme l'indique la figure 26 *b*.

La transposition du domaine temporel au domaine des fréquences est donc établie, mais sous une forme infinie qui ne facilite pas l'analyse globale d'un système. Il convient de trouver une forme limitée, soit pour la série en e^{-pT}, soit pour le développement en fractions de dénominateur de la forme $p + a + jn\Omega$. Cette expression peut être calculée si l'on utilise un produit de composition dans le domaine complexe à partir de

$$F^*(p) = \mathcal{L}[f(t)\,\delta_T(t)].$$

Il est démontré que si deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ peuvent être transformées par la méthode de Laplace en $F_1(p)$ et $F_2(p)$ respectivement, on a

$$(9) \quad \mathcal{L}[f_1(t) \times f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{C_2-j\infty}^{C_2-j\infty} F_1(p-s)\,F_2(s)\,ds$$

tel que C_2, valeur réelle, soit comprise entre les limites de convergence des fonctions $F_1(-s)$ et $F_2(+s)$ le long de l'axe réel, dans le plan complexe s comme indiqué sur la figure 27.

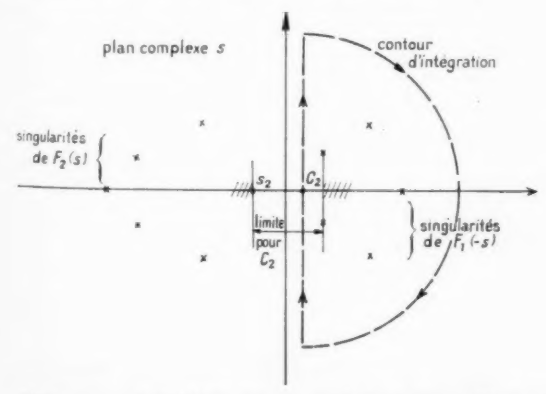


Fig. 27. — Intégration par un produit de composition.

Transformant dans le plan complexe s les fonctions $f(t)$ et $\delta_T(t)$, on obtient

$$\mathcal{L}[f(t)]_s = F(s) = F_2(s),$$

$$\mathcal{L}[\delta_T(t)]_s = 1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-sT}} = F_1(s),$$

$$(10) \quad F^*(p) = \frac{1}{2\pi j}\int_{C_2-j\infty}^{C_2+j\infty} F(s)\,\frac{1}{1 - e^{-T(p-s)}}\,ds.$$

Le théorème de Cauchy, relatif à une intégration le long d'un contour, peut être appliqué ici de deux façons, suivant que le chemin d'intégration pour s tendant vers l'infini est situé à droite ou à gauche de la ligne $s = C_2$. L'intégration à droite dans un sens négatif le long du demi-cercle à l'infini, est

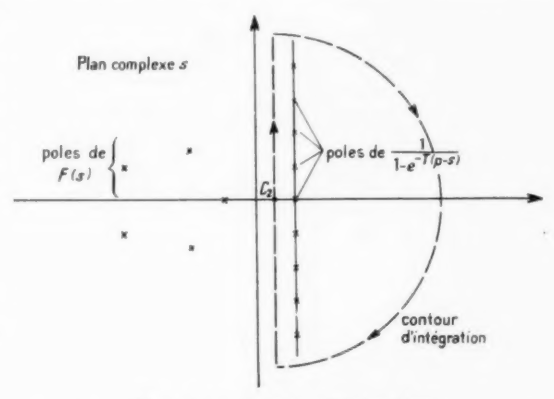


Fig. 28. — Chemin d'intégration dans la partie droite du plan complexe s pour calculer.

$$\int F(s)\,\frac{1}{1 - e^{-T(p-s)}}\,ds.$$

indiquée à la figure 28 et le contour entoure seulement les pôles de $\frac{1}{1 - e^{-T(p-s)}}$ situés à $s = p \pm jk\Omega$. La fonction $F(s)$ tend en général vers zéro sur le demi-cercle à l'infini, ce qui est le cas pour les systèmes physiques étudiés ici. L'intégrale se réduit alors à la somme, changée de signe, des résidus des pôles à $s = p \pm jk\Omega$ qui sont égaux à

$$F(p \pm jk\Omega)\left|\frac{1}{\frac{d}{ds}[1 - e^{-T(p-s)}]}\right|_{s=p\pm jk\Omega} = \frac{F(p \pm jk\Omega)}{T},$$

donc

$$(11) \quad F^*(p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{F(p \pm jk\Omega)}{T},$$

expression identique à celle déjà trouvée.

L'intégration le long de l'axe $s = C_2$ et du demi-cercle situé à gauche, entoure maintenant tous les pôles de $F(s)$ dans un sens positif (*fig.* 29). L'intégrale se réduit à la somme des résidus des pôles situés à $s = s_q$. Si la fonction $F(s)$ est une fraction rationnelle de deux polynomes, ce qui est généralement les cas pour les systèmes physiques,

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}.$$

$$\int F(s) \frac{1}{1 - e^{-T(p-s)}} \, ds$$

Fig. 29. — Chemin d'intégration dans la partie gauche du plan complexe s pour calculer

$B(s)$ n'ayant que des pôles simples en nombre Q, l'intégrale est finalement

$$(12) \qquad F^*(p) = \sum_{q=1}^{Q} \frac{A(s_q)}{\left| \frac{d}{ds} B(s_q) \right|_{s=s_q}} \frac{1}{1 - e^{-T(p-s_q)}}.$$

La variable complexe p n'apparaît plus dans les dénominateurs de la forme $1 - e^{Ts_q} e^{-Tp}$ que suivant un terme exponentiel. $\dfrac{A(s_q)}{\frac{d}{ds} | B(s) |_{s=s_q}} e^{-Tp}$ et e^{Ts_q} sont seulement des constantes déterminées par les pôles de $F(s)$. Donc une somme de termes fractionnaires en e^{Tp} une fois calculée donnera une expression non infinie en fonction de e^{-Tp}.

Dans le cas de Q pôles d'ordre multiple, l'intégration conduit à une expression plus compliquée de la forme

$$F^*(p) = \sum_{q=l}^{Q} \sum_{i=1}^{mq} \frac{(-1)^{mq-i} K_{qi}}{(mq-j)!} \left[\frac{d^{mq-i}}{ds^{mq-i}} \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \right]_{s=p-s_q},$$

avec

$$K_{qi} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[(s - s_n)^{mq} \frac{A(s)}{B(s)} \right]_{s=s_n}$$

le pôle s_1 étant d'ordre m_1;
le pôle s_2 étant d'ordre m_2;
le pôle s_q étant d'ordre m_q.

Les facteurs K_{qi} sont des constantes calculées pour chaque pôle s_q, tandis que les différentes dérivées $\frac{d^{mq-i}}{ds^{mq-i}}$ de $\frac{1}{1 - e^{-sT}}$ conduisent à des termes fractionnaires en e^{-sT}. Substituant $s = p - s_q$ on obtient finalement une expression algébrique de forme limitée en fonction de e^{-pT}, p étant la variable complexe étudiée.

Des deux expressions mathématiques rencontrées précédemment,

$$F^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} F(p + jn\Omega)$$

et

$$(13) \qquad F^*(p) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) e^{-Tnp},$$

seule la première a été retrouvée par un produit de composition dans le plan complexe.

La transformation définie par $Z = e^{+pT}$ définit une transformation conforme telle que quand un point m d'affixe $\sigma + j\omega$ dans le plan complexe p décrivant une courbe γ, le point M d'affixe $X + jY$ dans le plan complexe Z décrit une courbe Γ dite transformée. Mais cette transformation est non biunivoque, car pour des points m définis par $\sigma + j\left(\omega \pm \frac{2\pi}{T}\right)$, les points M sont confondus. Il est donc nécessaire et suffisant d'étudier la bande définie par $|jw| \leq j\frac{\pi}{T}$ dans le plan p pour être ramené à une transformation biunivoque courante.

Cette bande *abcd* (*fig.* 30 *a*) limitée à sa partie intéressante à gauche de l'axe des ω se transforme par l'intermédiaire de $Z = e^{+pT}$ en un cercle unitaire dans le plan (*fig.* 30 *b*).

La surface comprise dans *abcd* se transforme en la surface ABCD qui, pour σ tendant vers $-\infty$, est l'intérieur du cercle unité centré à l'origine, la partie comprise entre AB, BC, DC, s'amenuisant au simple tracé immatériel de l'axe réel. Après le trajet complet *dabc*, le point M parti de $Z = -1 + j^0$ revient à son point de départ. Si une demi-bande du plan p est choisie entre $2nj\frac{\pi}{T} \pm j\frac{\pi}{T}$, le même trajet est effectué le long du cercle unité. Toute la partie

gauche du plan p décrite par bandes de largeur $\frac{2\pi}{T} = \Omega$ se transforme donc en un cercle de surface limitée d'une manière qui fait penser à un empilage de feuillets, un par bande. Ce sont très exactement les feuillets dits de Riemann.

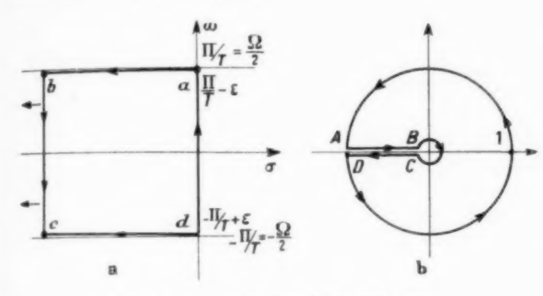


Fig. 30. — Transformation conforme.

a. Demi-bande $p = \pm j\,\frac{\Omega}{2}$ du plan complexe p.

b. Cercle unitaire du plan complexe z.

Maintenant, tout l'intérêt de la transformation

$$Z = e^{pT}$$

est évident. La multiplicité des pôles, zéros et points du plan p, devient unicité dans le plan Z et, en outre, dans une surface limitée. La transformation $Z = e^{-pT}$ aurait conduit à la même unicité, mais dans la surface extérieure du cercle unité, représentation qui donne plus d'importance ou de poids aux points (pôles ou zéros) situés loin du cercle unité, alors que leur effet sur la forme de la fonction $f(nT)$ est négligeable comparé à celui des pôles près du cercle. Cet aspect est apparent quand le régime transitoire d'une fonction $f(nT)$ est déterminé à partir de l'emplacement des pôles et zéros de $F(Z)$.

La deuxième forme s'obtient aisément à partir d'un développement illimité des termes limités, $\frac{1}{1 - K e^{-pT}}$ s'exprimant en série de e^{-pTn} dont l'addition de tous les termes de même rang n fournit les coefficients de $F(nT)$.

Le rapprochement entre les trois formes est donc facile et selon les circonstances, l'une des trois formes sera préférée aux autres. Par exemple, la première se prête bien à la construction de la fonction $F^*(p)$ dans le plan complexe, à partir du tracé de $F(p)$ dans ce même plan. Le développement infini donne par représentation graphique le long d'un axe en retardant chaque impulsion d'une valeur régulière, une image de la réponse échantillonnée d'un filtre ou d'un système à information pulsée. La troisième est de loin la plus intéressante; par son caractère limité elle convient particulièrement bien à l'étude graphique et analytique des systèmes pulsés. Elle est limitée, non en p, mais en e^{-pT} ou e^{pT} ce qui incite à choisir une de ces expressions comme nouvelle variable complexe Z, à laquelle les méthodes d'analyse utilisées pour p sont valables.

3.2. **Théorie de la transformation en** Z.

3.2.1. Définition. — Le changement de variable $Z = e^{pT}$ a été choisi au lieu de $Z = e^{-pT}$ [3]. L'exponentielle e^{-pT} correspondant à un retard exprimé dans le domaine complexe se rattache à une notion aisément visualisable, ce qui n'est plus le cas pour $e^{pT} = Z$ représentant un phénomène de prédiction d'avance dans le temps, physiquement irréalisable. Ce caractère traduit l'aspect purement mathématique de la transformation choisie. Cette dernière se prête d'ailleurs plus facilement à l'étude des fonctions de transfert comme nous le verrons dans les chapitres suivants, car elle transforme la partie intéressante et illimitée du plan complexe p, en une surface limitée englobant tous les zéros et pôles du système. Par contre, l'expression de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(nT)\, e^{-pTn}$$

n'est pas obtenue directement à partir de $F(Z = e^{pT})$ qui doit être convertie en $F(Z^{-1} = e^{-pT})$ avant de subir le développement en série de e^{-pT} en supposant

$$|e^{+pT}| > 1 \qquad \text{ou} \qquad |Z| > 1.$$

A partir de maintenant, la fonction $F^*(p)$ est remplacée par la notation $F(Z) = F^*(p)$ signifiant une expression en Z plus maniable et équivalente. Le passage de $f(nT)$ à $F(Z)$, s'indique symboliquement par

$$F(Z) = \mathfrak{Z}[f(nT)] = F^*(p).$$

3.2.2. Moyen de calculer la transformée en Z d'une fonction. — La transformation en Z permet de calculer simplement la transformée de Laplace d'une fonction pulsée à partir, soit de $f(t)$

[3] Cette dernière transformation a été utilisée par le groupe d'étude des systèmes pulsés formé par M. M. Linvill-Salzer au Massachussets Institute of Technology (M. I. T.) Cambridge, Mass., U. S. A. Les premières utilisations d'une transformation spéciale pour systèmes pulsés ont été indiquées en $Z = e^{pT}$. Maintenant, sous l'impulsion de MM. Ragazzini et Zadeh du groupe d'étude de Columbia Université, New-York, c'est cette dernière formule qui est couramment utilisée.

fonction continue correspondante, soit de $F(p)$ transformée de Laplace de la fonction continue.

Des trois formes de la transformation de Laplace appliquée aux fonctions pulsées que nous avons trouvées

$$(11) \qquad F^{*}(p) = F(Z) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{k} F(p + jk\Omega)$$

$$(12) \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{-pnT}$$

$$(13) \qquad = \sum_{q=1}^{Q} \frac{A(s_q)}{B'(s_q)} \frac{1}{1 - e^{s_q T} e^{-pT}}$$

nous nous servirons uniquement de la troisième dans le cas de système continu possédant une expression en $F(p)$ et subissant un échantillonnage. Dans ce cas, la transformation en Z n'est qu'une transformation de Laplace modifiée. La forme (13) a le grand avantage de conduire à une expression limitée et facilement manipulable de la transformée pulsée.

Si le système étudié ne peut être mis sous la forme transformée $f(p)$, seule l'expression (12) est utilisable sans toutefois permettre une étude analytique du système. La transformation en Z se résume alors à un simple changement de notation.

Donc, quand la fonction étudiée $f(t)$ s'exprime dans le domaine complexe p par le rapport de deux polynomes rationnels, avec $B(p)$ ayant N racines simples à $p = p_n$, le calcul de la valeur $\left.\frac{A(p)}{B'(p)}\right|_{p=p_n}$ et l'addition des termes correspondant à chaque pôle, permettent de déterminer la fonction $F(Z)$. Cette formule applicable seulement aux fonctions ayant des pôles simples, mais qui s'étend aisément aux fonctions à pôles multiples (*voir* § 3.1) permet les déductions suivantes :

— Le nombre de pôles de $F(Z)$ est égal au nombre de pôles de $F(p)$ par suite de la correspondance

$$\mathfrak{Z} = \left[\frac{A}{p + p_n}\right] = \frac{A}{1 - e^{p_n T} Z^{-1}};$$

— Les zéros de $F(Z)$ ne sont pas déterminés en nombre et emplacement, ni par les zéros, ni par les pôles de $F(p)$;

— Si le nombre de zéros de $F(p)$ est modifié, les zéros de $F(Z)$ sont affectés par l'intermédiaire de $\frac{A(p_n)}{B'(p_n)}$, mais pas les pôles de $F(Z)$.

— Un changement de place des pôles de $F(p)$ modifie les pôles de $F(Z)$ et par l'intermédiaire de $\frac{A(p_n)}{B'(p_n)}$ les zéros de $F(Z)$.

Donc, cette méthode se prête particulièrement bien au calcul de $F(Z)$ à partir de $F(p)$, même de forme compliquée.

Exemple :

$$F(p) = \frac{a}{p(p + a)};$$

$$F(Z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{A(p^n)}{B'(p_n)} \frac{1}{1 - e^{p_n T} Z^{-1}},$$

$$\text{où} \quad p_1 = 0, \qquad p_2 = -a;$$

$$F(Z) = \frac{a}{a(1 - Z^{-1})} - \frac{a}{a(1 - e^{-aT} Z^{-1})};$$

$$F(Z) = \frac{Z^{-1}(1 - e^{-aT})}{(1 - Z^{-1})(1 - e^{-aT} Z^{-1})};$$

$$F(Z) = \frac{Z(1 - e^{-aT})}{(Z - 1)(Z - e^{-aT})}.$$

Dans le cas d'un pôle multiple de degré m à $p = p_n$, la formule devient :

$$F(Z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!\,(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \times \left[(p - p_n)^m \frac{A(p)}{B(p)}\right]_{p=p_n} \left[\frac{d^{m-j}}{dp^{m-j}} \frac{1}{1 - e^{-pT}}\right]_{p=p_n}$$

Quels que soient le nombre et la multiplicité des pôles, chaque fonction $F(Z)$ est composée de la somme d'expressions correspondant à chaque pôle et à son degré de multiplicité. En construisant une table ayant pour entrée les fonctions $F(p)$ représentatives de pôles simples ou multiples et pour résultat les transformées correspondantes, on a le moyen pratique de déterminer $F(Z)$ par addition d'expressions simples, provenant du développement de $F(p)$. Cette table sert en sens inverse, pour trouver, à partir de $F(Z)$, les fonctions $F(p)$ et $f(nT)$ qui lui correspondent. Un exemplaire de cette table empruntée au livre de J. Tou, *Digital and Sampled data Control Systems* est donné en Annexe à la fin de l'article. Cette méthode de calcul est donc tout à fait générale et ne rencontre pas de difficulté une fois la fonction $F(p)$ connue. Les opérations de différenciation et d'intégration par rapport à une variable indépendante permettent de trouver des équivalences et de passer d'un domaine dans l'autre.

Exemple :

Différentiation par rapport à la variable indépendante a dans $\mathfrak{Z}\left[\frac{a}{p(p+a)}\right]$:

$$\mathfrak{Z}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{a}{p(p+a)}\right] = \mathfrak{Z}\left[\frac{p^2+pa-pa}{p^2(p+a)^2}\right] = \mathfrak{Z}\left[\frac{1}{(p+a)^2}\right].$$

Mais en transformant en $\mathfrak{Z}\left[\frac{a}{p(p+a)}\right]$, puis en différentiant, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\frac{(1-\mathrm{e}^{-aT})Z^{-1}}{(1-\mathrm{e}^{-aT}Z^{-1})(1-Z^{-1})}\right]$$
$$= \frac{T\mathrm{e}^{-aT}Z^{-1}(1-Z^{-1})(1-\mathrm{e}^{-aT}Z^{-1}-Z^{-1}+\mathrm{e}^{-aT}Z^{-1})}{(1-\mathrm{e}^{-aT}Z^{-1})^2(1-Z^{-1})^2}$$
$$= \frac{T\mathrm{e}^{-aT}Z^{-1}(1-Z^{-1})^2}{(1-\mathrm{e}^{-aT}Z^{-1})^2(1-Z^{-1})^2},$$

Donc

$$\mathfrak{Z}\left[\frac{1}{(p+a)^2}\right] = \frac{T\mathrm{e}^{-aT}Z}{(Z-\mathrm{e}^{-aT})^2}.$$

3.3. **Quelques propriétés des fonctions $F(Z)$.**

3.3.1. Linéarité. Principe de superposition. — La transformation Z est une opération linéaire : la superposition dans le domaine temporel étant respectée dans le domaine Z.

Si

$$F_1(Z) = \mathfrak{Z}[f_1(nT)],$$
$$F_2(Z) = \mathfrak{Z}[f_2(nT)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_N(Z) = \mathfrak{Z}[f_N(nT)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on aura

$$F_1(Z)+F_2(Z)+\ldots+F_N(Z)$$
$$= \mathfrak{Z}[f_1(nT)+f_2(nT)+\ldots+f_N(nT)]$$

et ceci, quel que soit le nombre de termes.

Cette linéarité peut être visualisée en utilisant pour $F_1(Z)$, $F_2(Z)$, ..., $F_N(Z)$ leur forme développée en puissance de Z^{-1} tel que

$$F_1(Z) = f_1(0) f_1(T)Z^{-1} + f_1(2T)Z^{-2}+\ldots,$$
$$F_2(Z) = f_2(0) + f_2(T)Z^{-1} + f_2(2T)Z^{-2}+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_N(Z) = f_N(0) + f_N(T)Z^{-1}) + f_N(2T)Z^{-2}+\ldots.$$

L'addition de tous les coefficients des Z^{-n}, de même rang n, conduit à l'amplitude de l'impulsion au temps $nT = t$ de la fonction du temps, somme des fonctions partielles du temps $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_N(t)$ qui, une fois échantillonnées, deviennent $(f_1 nT)$, $f_2(nT)$, ..., $f_N(nT)$. Notons la facilité de passage du domaine complexe au domaine temporel, en négligeant l'opérateur de retard qu'est Z^{-1}. Ceci est d'un grand intérêt quand il s'agit de déterminer la réponse d'un système dans le temps, à partir de l'expression $F(Z)$, et cela avec un temps ou une période de temps fixé. La forme analytique $f(nT)$ n'est alors pas nécessaire, ce qui évite un calcul toujours long et fastidieux.

D'après la théorie des séries de Fourier, nous savons que toute fonction du temps satisfaisant la condition de convergence pour t tendant vers l'infini, peut être décomposée en un nombre fini ou infini de fonctions élémentaires de la forme

$$f_k(t) = A_k \mathrm{e}^{+aT},$$

a étant complexe.

Si nous soumettons chaque $f_k(t)$ au processus d'échantillonnage, nous obtiendrons

$$f(t) = \sum_{k=0}^{K} f_k(t),$$

$$F_k(Z) = \mathfrak{Z}[f_k(t)] = A_k\,\mathfrak{Z}[\mathrm{e}^{naT}] = \frac{A_k Z}{Z-\mathrm{e}^{-aT}}.$$

Cette propriété est, comme dans le cas de la transformation inverse de Laplace, d'une grande utilité pour décomposer une fonction $F(Z)$ en fonctions élémentaires, dont la transformée inverse est connue par l'intermédiaire d'une table. Ce développement est étudié plus en détail au paragraphe de la transformation inverse Z.

3.3.2. Théorème du produit. — Considérons un signal d'entrée $g_1(t)$ et un système dont la réponse à l'impulsion $\delta(t)$ de Dirac (réponse impulsionnelle) est $g_2(t)$. Le signal de sortie est donné par la relation

$$g(t) = \int_0^t g_1(\tau)\,g_2(\tau-t)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_0^t g_1(\tau-t)\,g_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Si un modulateur d'impulsions est placé à la sortie, la fonction pulsée $G^*(p)$ dans le domaine p se calcule à partir de

$$g^*(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^t g_1(\tau)\,g_2(\tau-t)\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}\,\mathrm{d}\tau$$

dont la transformée de Laplace est

$$\mathcal{L}[g^*(t)] = G^*(p)$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{t} g_1(\tau)g_2(\tau - t)\,e^{jn\Omega t}\,e^{-pt}\,dt\,d\tau$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} g_1(\tau)\,d\tau\int_0^{\tau} g_2(\tau - t)\,e^{(n\Omega j - p)t}\,dt$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} g_1(\tau)\,e^{(jn\Omega - p)t}\,d\tau\; G_2(p - jn\Omega),$$

et, d'après la relation,

$$\int_0^{\gamma} g_2(t - \tau)\,e^{at}\,dt = f_2(\gamma)\,e^{a\gamma}.$$

On a donc

$$G^*(p) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_1(p - jn\Omega)\,G_2(p - jn\Omega)$$

ou, comme n prend toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$,

$$G^*(p) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_1(p + jn\Omega)\,G_2(p + jn\Omega)$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_1G_2(p + jn\Omega) = \sum_{0}^{\infty} g(nT)\,e^{-pnT}.$$

Cette formule est identique à

$$F^*(p) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(p + jn\Omega) = F(Z)$$

dans laquelle on identifie

$$F^*(p) = G^*(p) = G(Z).$$

On voit alors que les deux fonctions $G_1(p)$ et $G_2(p)$ ne sont pas transformées séparément, ce que nous écrirons au moyen de

$$(14)\qquad G^*(p) = G(Z) = G_1G_2(Z)$$

qui n'est pas équivalent à

$$G_1(Z)G_2(Z) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_1(p + jn\Omega)\,\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_2(p + jn\Omega).$$

L'échantillonnage intervenant sur le signal $g(t)$, produit de composition de $g_1(t)$ et $g_2(t)$, ne peuvent faire apparaître les transformations pulsées de $g_1(t)$ et $g_2(t)$.

Il est important de noter que la transformée de Laplace du produit de composition, aurait donné par le théorème de Borel :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{t} g_1(\tau)\,g_2(\tau - t)\,d\tau\right] = G_1(p)\,G_2(p)$$

si l'on a

$$G_1(p) = \mathcal{L}[g_1(t)],$$
$$G_2(p) = \mathcal{L}[g_2(t)]$$

qu'il ne faudrait pas convertir dans le domaine Z de la façon suivante $G_1(Z)\,G_2(Z)$. Ceci nous indique que toutes les fois qu'un échantillonnage est opéré sur une fonction exprimée dans le domaine p, ses facteurs ne peuvent être transformés successivement. Si la fonction d'ensemble n'apparaît pas dans la table, il faut la décomposer en une somme d'éléments simples par développement autour des pôles de la fonction et ensuite transformer chaque élément ainsi obtenu.

Si, par exemple, on choisit

$$g_1(t) = \delta_{-1}(t),$$

où $\delta_{-1}(t)$ = échelon unité, avec

$$G_1(p) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad g_2(t) = \delta_{-1}(t)\,[1 - e^{-at}],$$

soit

$$G_2(p) = \frac{a}{p(p + a)},$$

le résultat pulsé devient

$$g^*(t) = \left[\int_0^{t} g_1(\tau)\,g_2(t - \tau)\,d\tau\right]^*$$
$$= \frac{1}{a}(anT - 1 + e^{-anT})$$
$$= \frac{1}{a}(anT - 1 + e^{-anT}),$$

n variant de o à l'infini

$$G^*(p) = \mathfrak{Z}[g^*(t)]$$
$$= \mathfrak{Z}[g_1(p)\,g_2(p)] = \mathfrak{Z}\left[\frac{a}{p^2(p + a)}\right]$$
$$= \mathfrak{Z}\left[\frac{1}{p^2} + \frac{\frac{1}{a}}{p + a} + \frac{-\frac{1}{a}}{p}\right]$$
$$= \frac{TZ^{-1}}{(1 - Z^{-1})^2} + \frac{\frac{1}{a}}{1 - e^{-aT}Z^{-1}} + \frac{-\frac{1}{a}}{1 - Z^{-1}}$$
$$G(Z) = \frac{Z[(aT - 1 + e^{-aT})Z - aT]}{a(Z - e^{aT})(Z - 1)^2}.$$

Une autre situation fréquemment rencontrée est celle où le signal d'entrée est échantillonné et devient $g_1^*(t)$, la réponse impulsionnelle du système étant $g_2(t)$ ou $G_2(p)$.

Le signal de sortie est

$$g(t) = g_2(t)\, g_1^*(t).$$

L'intégrale du produit de composition n'est plus à faire, puisque $g_1^*(t)$ a des valeurs discrètes correspondant à des impulsions. L'échantillonnage à la sortie s'écrit

$$g^*(t) = [g_2(t)\, g_1^*(t)]^*,$$

$$G^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_2(p + jn\Omega)\, G_1^*(p + jn\Omega).$$

Mais $g_1(t)$ est pulsé à la même fréquence et possède déjà la périodicité $j\Omega$. Donc on a

$$(15) \qquad G_1^*(p + jn\Omega) = G_1^*(p) = G_1(Z),$$

$$G^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_2(p + jn\Omega)\, G_1^*(p)$$

$$= \frac{1}{T} G_1^*(p) \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_2(p + jn\Omega),$$

$$G^*(p) = G_1^*(p)\, G_2^*(p),$$

$$G(Z) = G_1(Z)\, G_2(Z).$$

En définitive, la fonction d'échantillonnage à la sortie d'un système connu ayant un signal d'entrée pulsé, est obtenue par le produit des deux fonctions pulsées, celle de l'entrée et celle de la réponse impulsionnelle du système.

L'exemple précédent, avec le signal d'entrée pulsé, conduit aux expressions suivantes :

$$g_1^*(t) = \delta_T(t),$$

d'où

$$G_1(Z) = \frac{1}{1 - Z^{-1}} = \frac{Z}{Z - 1}$$

et

$$g_2(p) = \frac{a}{p(p + a)},$$

$$\mathfrak{Z}[g(t)] = \mathfrak{Z}[g_1^*(t)\, g_2(t)] = G_1(Z)\, G_2(Z),$$

comme

$$\mathfrak{Z}[g_2(t)] = G_2(Z) = \frac{(1 - e^{-aT})\, Z}{(Z - e^{-aT})(Z - 1)},$$

on trouve finalement

$$G(Z) = \frac{(1 - e^{-aT})\, Z^2}{(Z - e^{-aT})(Z - 1)^2}$$

qui est différent, comme attendu, de la fonction pulsée correspondant à

$$\mathfrak{Z}[g(t)] = \mathfrak{Z}[g_1(t)\, g_2(t)]$$

trouvée précédemment.

L'expression

$$G^*(p) = G_1^*(p)\, G_2^*(p)$$

peut s'écrire

$$g(nT) = g_1(nT)\, g_2(nT)$$

qui est le produit de deux séries infinies de termes représentant l'amplitude d'impulsions régulièrement espacées. Ceci est identique à la méthode utilisée pour évaluer la réponse dans le temps, d'un système asservi et qui consiste à représenter le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle du système par des séries limitées d'impulsions.

Les considérations ci-dessus conduisent à parler de la notion de fonction de transfert pulsée. La fonction de transfert pulsée est l'expression qui relie la transformée de Laplace du signal de sortie pulsé à la transformée de Laplace du signal d'entrée pulsé au synchronisme d'un système de transmission de signaux, qu'il soit en cascade ou en boucle fermé.

Il faut donc nécessairement disposer d'une entrée et d'une sortie discontinues pour définir cette fonction de transfert pulsée. On obtiendra alors cette dernière en appliquant la transformation en Z à l'ensemble des éléments de transmission entre la sortie et l'entrée et en utilisant les propriétés du produit que nous venons de voir.

Souvent on rencontre des systèmes dont, soit la sortie, soit l'entrée, soit les deux sont continus bien que les systèmes soient du type pulsé, car ils échantillonnent des signaux au cours de leur transmission. On désire encore utiliser la transformation en Z qui élimine la multiplicité des pôles et zéros du plan p pour définir la transmission par une fonction de transfert pulsée. Il faut alors échantillonner artificiellement la sortie à la même fréquence que l'échantillonnage interne du système. On est ramené au cas précédent. On peut toujours placer un échantillonneur fictif à la sortie du système sans perturber le système car le signal de sortie par définition ne retourne pas dans le système et l'on ne se préoccupe pas de ce qui suit la sortie pour l'analyse du système. Mais on ne peut placer de la même façon un échantillonneur fictif à l'entrée sans vérifier qu'on ne perturbe pas le fonctionnement du système. Si à l'intérieur de celui-ci et juste après l'entrée existe un échantillonneur, on ne modifie pas le système en mettant en série un autre échantillonneur synchrone. On peut même s'en dispenser. Mais si le signal d'entrée $E(p)$ entre dans un élément à réponse continue $G(p)$ suivi par un échantillonneur, nous avons vu qu'on doit écrire

$$[E(p)\, G(p)]^* = \mathfrak{Z}[E(p)\, G(p)] = E\,G(Z),$$

expression qu'on ne peut pas dissocier en

$$E(Z)\,G(Z).$$

La fonction de transfert pulsée n'est pas calculable dans ces conditions. Mais il est toujours possible de calculer la réponse du système, quelle soit pulsée ou continue, à l'entrée d'un signal continu. On opère comme dans la détermination de la réponse d'un système entièrement continu :

— en écrivant les équations de combinaison des signaux dans le système;

— en appliquant la transformation en Z et les règles du produit à toutes les expressions des signaux rencontrant des échantillonneurs ou des éléments à fonctionnement pulsé.

3.3.3. Valeurs initiale et finale de $F(Z)$. — Supposons la fonction 5.20,

$$F(Z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,Z^{-n}$$

dont nous ne prenons que les N premiers termes

$$\sum_{n=0}^{N} f(nT)\,e^{-npT}=\sum_{n=0}^{N} f(nT)\,Z^{-n}.$$

Déplaçons cette fonction d'un intervalle, retard s'exprimant par Z^{-1} et ne prenons que les $N-1$ premiers termes,

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\,Z^{-n}Z^{-1}.$$

La soustraction de ces deux séries en Z^{-1}

$$\sum_{n=0}^{N} f(nT)\,Z^{-n}-\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\,Z^{-n}Z^{-1}$$

se réduit au terme $f(NT)$ pour la valeur $Z^{-1}=1$, les deux séries devenant simplement une somme d'amplitudes,

$$\left\{\begin{array}{l} f(nT)=\left[\sum_{n=0}^{N} f(nT)\,Z^{-n}-\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\,Z^{-n}Z^{-1}\right] \\ \qquad (Z^{-1}=1 \quad \text{ou} \quad Z=1). \end{array}\right.$$

Si ensuite N tend vers l'infini, on obtient

$$\left[\sum_{n=0}^{N} f(nT)\,Z^{-n}\right]_{N\to\infty} \to F(Z).$$

d'où

$$\left[\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\,Z^{-n}\right]_{N\to\infty} \to F(Z),$$

$f(NT)_{N\to\infty}$ est la valeur à l'infini de la fonction $f(t)=f(\infty)\; t\to\infty$

$$(16)\qquad f(\infty)=\lim\left[(1-Z^{-1})\,F(Z)\right]_{Z=1}.$$

La valeur initiale de $F(t)$ est donnée par l'amplitude de la première impulsion à $t=0$, ce qui est le coefficient du terme en Z^0 du développement en série de $F(Z)$. Considérons un développement limité à N

$$F(Z)=\sum_{n=0}^{N} f(nT)\,Z^{-n}=f(0)+\sum_{n=1}^{N} f(nT)\,Z^{-n}.$$

Le deuxième terme du second membre comprend tous les termes suivant les puissances décroissantes de Z. En faisant tendre Z vers l'infini, ceux-ci tendent vers zéro et il reste finalement

$$f(0)=\lim\,|\,F(Z)\,|_{Z\to\infty}.$$

Cette expression est équivalente à

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} f(0)=\lim\,|\,(1-Z^{-1})\,F(Z)\,|_{Z\to\infty}, \\ f(0)=\lim\,|\,F(Z)\,|_{Z\to\infty}-\lim\,|\,Z^{-1}F(Z)\,|_{Z\to\infty} \\ \qquad =\lim\,|\,F(Z)\,|_{Z\to\infty}+0. \end{array}\right.$$

Exemple de détermination des valeurs $f(0)$ et $f(\infty)$. — Prenons la fonction

$$F(Z)=\frac{Z\left[2Z-(1+e^{-aT})\right]}{(Z-1)(Z-e^{-aT})},$$

valeur initiale :

$$f(0)=\lim\left|\frac{Z(1-Z^{-1})(2Z-1+e^{-aT})}{(Z-1)(Z-e^{-aT})}\right|_{Z\to\infty}=2,$$

valeur finale :

$$f(\infty)=\lim\left|\frac{Z(1-Z^{-1})}{Z-1}\;\frac{2Z-1+e^{-aT}}{Z-e^{-aT}}\right|_{Z\to 1},$$

$$f(\infty)=1.$$

3.4. **Transformation inverse.**

3.4.1. Définition. — Il s'agit de retrouver le coefficient $f(nT)$ à partir de l'expression $F(Z)$.

Le coefficient $F(nT)$ est multiplié par Z^{-n} dans le développement

$$F(Z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,Z^{-n}$$
$$=f(0)+f(1)\,Z^{-1}+\ldots+f(nT)\,Z^{-n}.$$

Multiplication par Z^{n-1} des deux membres conduit à

$$Z^{n-1} F(Z) = f(0) Z^{n-1} + f(1) Z^{n-2} + \ldots \\ + f(nT) Z^{-1} + f(mT) Z^{-m-n-1} \ldots.$$

L'application du théorème de Cauchy, le long d'un contour Γ englobant toutes les singularités de $Z^{n-1} F(Z)$ donne

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} Z^{n-1} F(Z)\,\mathrm{d}Z = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f(mT) Z^{-m}\right] Z^{n-1}\,\mathrm{d}Z \\ = f(nT).$$

Si le système possède une sortie et une entrée continues, on peut en suivant cette méthode obtenir la réponse continue d'un système comportant un échantillonnage interne.

L'expression comportera des éléments en p et des éléments en Z. En faisant $Z = e^{pT}$ l'expression peut être analysée entièrement dans le plan p et permet d'obtenir la réponse continue du système. En appliquant la transformation en Z à l'expression de la réponse, on placera l'analyse entièrement dans le plan Z ce qui conduira à la réponse pulsée du système se déduisant de la réponse continue par un échantillonnage fictif du signal de sortie.

Ces manipulations seront utilisées dans les exemples fournis au chapitre 5. Le tableau de la figure 31 donne les réponses continues ou pulsées de quelques structures de base de systèmes de transmission, car l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} A Z^{k}\,\mathrm{d}Z$$

est non nulle, seulement pour $k = 1$ et vaut A.

Structure de base.	Transformée de Laplace du signal de sortie.	Transformée en Z du signal de sortie.
A — E(p), G(p), S(p), H(p)	$\dfrac{G(p)E^*(p)}{1+HG^*(p)}$	$\dfrac{G(Z)E(Z)}{1+HG(Z)}$
B — E(p), G(p), S(p), H(p)	$\dfrac{G^*(p)E^*(p)}{1+H^*(p)G^*(p)}$	$\dfrac{G(Z)E(Z)}{1+H(Z)G(Z)}$
C — E(p), G(p), S(p), H(p)	$G(p)\left[E(p)-\dfrac{H(p)EG^*(p)}{1+HG^*(p)}\right]$	$\dfrac{EG(Z)}{1+HG(Z)}$
D — E(p), $G_1(p)$, $G_2(p)$, S(p), H(p)	$\dfrac{G_2(p)EG_1^*(p)}{1+HG_1G_2^*(p)}$	$\dfrac{G_2(Z)EG_1(Z)}{1+HG_1G_2(Z)}$
E — E(p), $G_1(p)$, $G_2(p)$, S(p), H(p)	$\dfrac{G_2(p)G_1^*(p)E^*(p)}{1+G_1^*(p)G_2H^*(p)}$	$\dfrac{G_1(Z)G_2(Z)E(Z)}{1+G_1(Z)G_2H(Z)}$

Fig. 31. — Transformées des signaux de sortie de quelques structures de base.

Donc, la formule d'inversion est

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} F(Z)\, Z^{n-1}\, dZ.$$

pour Γ englobant toutes les singularités de $F(Z)$.

Cette formule doit pouvoir se déduire de la formule de Mellin-Fourier dans le domaine complexe p, car la notation nouvelle en Z et le plan complexe Z, se rattachent directement à p.

Dans le plan p, la transformation inverse s'énonce

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p)\, e^{pt}\, dp.$$

En régime discontinu p est remplacé par $F^*(p)$, composé d'une suite des puissances de e^{pT}

$$f^*(t) = f(nT) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F^*(p)\, e^{pt}\, dp.$$

Pour être valable, cette expression doit être convergente et nulle le long d'un demi-cercle de rayon infini (lemme de Jordan). Quand $F^*(p)$ est une série suivant les puissances croissantes de e^{-pT} le lemme de Jordan n'est pas vérifié. Une explication imagée est fournie par le fait que e^{-npT} représente une impulsion dans le domaine temporel. L'utilisation d'un filtre comme le filtre idéal filtre passe-bas de gain T entre $p \pm j\frac{\Omega}{2}$ et 0 ailleurs, permet de fixer l'amplitude de cette impulsion en la transformant en la fonction $\frac{\sin\frac{\Omega t}{2}}{\frac{\Omega t}{2}}$ qui est unité pour $t = 0$ et 0 pour les temps $t = nT = \frac{2\pi n}{\Omega}$. L'intégrale précédente devient

$$f^*(t) = f(nT) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\frac{\Omega}{2}}^{j\frac{\Omega}{2}} F^*(p)\, e^{pnT}\, dp.$$

Pour les systèmes stables, ce contour est le cercle unité dans le domaine complexe Z.

En substituant nT à t, seuls instants où l'opération mathématique utilisée est correcte. Comme

$$Z = e^{pT},$$
$$dZ = T\, e^{pT}\, dp = TZ\, dp.$$

on obtient

$$(18)\quad \begin{cases} f(nT) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{p=-j\frac{\Omega}{2}}^{+j\frac{\Omega}{2}} F^*(p)\, Z^{n-1}\, dZ, \\ f(nT) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\Gamma = \text{cercle unité}} F(Z)\, Z^{n-1}\, dZ, \end{cases}$$

car

$$F^*(p) = F(Z)$$

et le parcours $p = \pm j\frac{\Omega}{2}$ dans le plan p correspond au cercle unité parcouru dans le sens positif.

Nous retrouvons bien la même expression à partir de la transformation inverse de Laplace. Cet aspect permet de rappeler que la transformation Z n'est qu'une notation pratique de la transformation de Laplace dans des cas spéciaux de fonctions irrationnelles en p. Il est donc normal de retrouver les propriétés et formules en fonction de Z, équivalentes à celles énoncées en p.

L'indication symbolique de la transformation inverse s'indiquera par

$$\mathfrak{Z}_{-1}[F(Z)] = f(nT)$$

par analogie avec la transformation de Laplace et son inverse qui s'écrivent $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_{-1}$ respectivement.

Exemple :

$$F(Z) = \frac{(1-e^{-aT})\, Z^{+1}}{(Z-1)(Z-e^{-aT})},$$

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} F(Z)\, Z^{n-1}\, dZ$$
$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} \frac{(1-e^{-aT})\, Z^{n}}{(Z-1)(Z-e^{-aT})}\, dZ,$$

résidus aux pôles $Z = 1$, $Z = e^{-aT}$

$$f(nT) = \frac{1-e^{-aT}}{1-e^{-aT}} + \frac{1-e^{-aT}}{-1+e^{-aT}}\, e^{-naT} = 1 - e^{-anT}.$$

La formule d'inversion donne l'expression générale de la fonction dans le temps avec la possibilité de calculer la valeur d'un échantillon quelconque de rang n, quelle que soit la forme de la fonction $F(Z)$ à condition d'être bornée dans le contour d'intégration.

3.4.2. Modalités de calcul. — Dans l'étude de systèmes d'asservissement, ou même de circuits électriques, la fonction $F(Z)$ se présente souvent sous forme d'un rapport de deux polynomes : $F(Z) = \frac{A(Z)}{B(Z)}$; $A(Z)$ et $B(Z)$ étant rationnels par rapport à Z.

Il est possible de calculer les racines de $B(Z)$ — pôles de $F(Z)$ — et de développer en fractions rationnelles de degré inférieur ayant pour pôles ceux de $F(Z)$. Ces opérations ne présentent aucune difficulté, si ce n'est la longueur des calculs nécessaires pour extraire les racines de $B(Z)$ et déterminer les coefficients du développement. Ensuite on peut utiliser une table de conversion pour effectuer, terme par terme, l'inversion comme cela est couramment pratiqué pour la transformation inverse de Laplace. La détermination exacte de $F(nT)$ ne justifie pas de tels calculs parfois laborieux.

Le plus souvent, la fonction du temps est la réponse d'un système physique à un signal d'entrée et la partie intéressante se situe sur les premiers échantillons. Il n'est pas besoin d'obtenir l'expression générale, mais simplement un développement limité de $F(Z)$ des premières puissances de Z^{-1}. Ce développement s'obtient aisément, par une longue division d'un polynome $A(Z)$ par un polynome $B(Z)$ tel que

$$F(Z) = \frac{A(Z)}{B(Z)},$$

forme rencontrée dans l'étude des systèmes physiques à information pulsée. $A(Z)$ et $B(Z)$ doivent être exprimés en puissances croissantes de Z^{-1} de façon à obtenir un développement du même genre avec la condition $Z^{-1} < 1$ ou $Z > 1$,

$$F(Z) = \frac{a_0 Z^0 + a_1 Z^{-1} + \ldots + a_p Z^{-p}}{b_0 Z^0 + b_1 Z^{-1} + \ldots + b_q Z^{-q}}$$
$$= c_0 Z^0 + c_1 Z^{-1} + c_2 Z^{-2} + \ldots + c_n Z^{-n},$$
$$\text{avec } c_n = f(nT).$$

Comme seuls des systèmes physiques sont étudiés, le développement ne doit pas donner de puissances positives de Z qui indiqueraient un phénomène de prédiction. Cette condition est satisfaite pour $b_0 \neq 0$. Les différents coefficients $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ s'expriment par les expressions

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0},$$
$$c_1 = \frac{a_1 - b_1 c_0}{b_0},$$
$$c_2 = \frac{a_2 - b_2 c_0 - b_1 c_1}{b_0},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$c_n = \frac{a_n - b_n c_0 - b_{n-1} c_1 + \ldots + \ldots - b_1 c_{n-1}}{b_0}$$

ou, d'une façon plus générale,

$$c_n = \frac{a_n}{b_0} - \sum_{j=1}^{q} \frac{b_j}{b_0} c_{n-j}$$

tel que $a_n = 0$ pour $n > p$, la limite supérieure de la somme $\sum_{=1}^{q}$ étant le plus grand des paramètres q ou n.

Pour $A(Z)$ et $B(Z)$ composés de deux ou trois termes, la division est effectuée sans difficultés, mais au-dessus, une disposition rationnelle des coefficients facilite la division et évite les erreurs. Une telle disposition des calculs a été suggérée par H. Freeman et nous la reproduisons ci-après.

L'expression donnant c_n peut se mettre sous la forme

$$c_n = u_n + \sum_{j=1}^{q} v_j c_{n-j}$$

avec les nouveaux paramètres

$$u_n = \frac{a_n}{a_0},$$
$$v_j = -\frac{b_j}{b_0}$$

définis par les coefficients de $A(Z)$ et $B(Z)$.

La série des c coefficients s'exprime sous forme matricielle telle que

$$[c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots, \infty] = [u_0, u_1, \ldots, u_p, 0, 0, 0, \ldots, \infty]$$
$$+ [v_1, v_2, v_q] \begin{bmatrix} 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{q-1} & \ldots & c_{n-1} \to \infty \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{q-2} & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & \ldots & c_{q-3} & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & \ldots & & & \\ \cdot & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & c_0 c_1 & \ldots & c_{n-q} \end{bmatrix}$$

qui conduit au tableau I pour la disposition des calculs.

Les paramètres v_j u_n et c_n sont introduits à leur place. Puis les colonnes de rang n, des doubles produits v_j c_{n-j} sont calculées par le produit du paramètre v_j situé sur la ligne j et le coefficient c_{n-j} se trouvant sur la ligne parallèle à la diagonale passant par la case n, j. Le calcul de la $n^{\text{ième}}$ colonne impose le calcul précédent des $n^{\text{ièmes}}$ colonnes. c_n est obtenu par addition des nombres apparaissant dans la $n^{\text{ième}}$ colonne et ainsi de suite.

Il est recommandé d'effectuer ces calculs répétitifs avec une grande précision. La détermination d'une amplitude repose sur les q amplitudes précédentes.

Cette méthode de division continue a beaucoup d'attrait pour effectuer le passage du domaine complexe en Z au domaine temporel.

TABLEAU I. — *Disposition de la feuille de calculs pour développer*

$$F(Z)=\frac{a_0 Z^0+a_1 Z^{-1}+a_2 Z^{-2}\ldots a_m Z^{-m}}{b_0 Z^0+b_1 Z^{-1}+\ldots+b_q Z^{-q}}=c_0 Z^0+c_1 Z^{-1}+\ldots.$$

$j \downarrow$	$i \rightarrow$ / $c_i \rightarrow$ / $v_j \downarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	...	...	...	i
		c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	...	...	...	...	...	...	...
1	v_1		v_1c_0	v_1c_1	v_1c_2	v_1c_3	v_1c_4	v_1c_5	...	...						
2	v_2	o		v_2c_0	v_2c_1	v_2c_2	v_2c_3	v_2c_4	v_2c_5	...	...					
3	v_3	o	o		v_3c_0	v_3c_1	v_3c_2	v_3c_3	v_3c_4	v_3c_5	...	...				
4	v_4	o	o	o		v_4c_0	v_4c_1	v_4c_2	v_4c_3	v_4c_4	v_4c_5	...	...			
⋮	⋮	o	o	o	o		v_5c_0	...	...	...	...	...	...	...		
⋮	⋮							...	...	...	...	...	...	...	...	
q	v_q								v_qc_0	v_qc_1	...	...	...	...	...	...
$u_i \rightarrow$		u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	...	...	...	...	u_m	— 0	0

$$u_i=\frac{a_i}{b_0};\qquad v_j=-\frac{b_j}{b_0};\qquad b_0\neq 0;\qquad c_i=u_i+\sum_{j=1}^{q} v_j c_{i-j}.$$

Si le caractère de discontinuité de la transformation en Z est dans ce cas très utile pour simplifier les calculs, elle limite l'information qu'on obtient sur une courbe de réponse à des instants d'échantillonnage qui sont immuables dans le temps. Aucun renseignement n'est obtenu entre ces instants et ceci est un inconvénient dans l'étude de systèmes asservis où la courbe de réponse est continue et peut présenter de rapides variations qui ne seront peut-être pas révélées.

3.5. Transformation en Z avec retard.

3.5.1. DÉFINITION. — Cette objection peut être éliminée si l'on définit une transformation en Z modifiée [4] ou transformation en Z avec retard.

Comme on a déjà utilisé un échantillonneur fictif à la sortie d'un système continu afin de pouvoir en calculer la fonction de transfert pulsée (se reporter au paragraphe 3.4.2), on place à la sortie d'un système continu un élément de retard fictif de $\Delta . T$ secondes (*fig.* 32 *a*). Si l'on fait suivre cet élément d'un échantillonneur fictif fonctionnant en synchronisme avec l'échantillonnage du système (*fig.* 32 *b*),

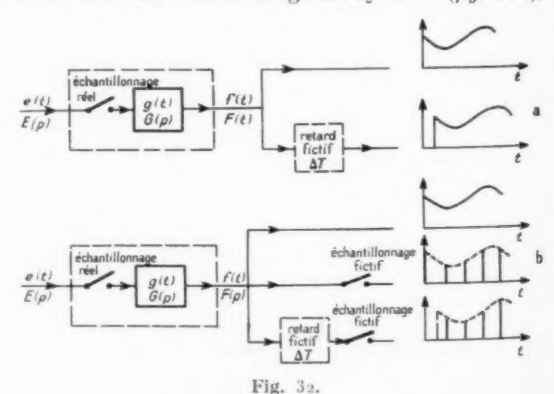


Fig. 32.

([4]) Outre-Atlantique, cette transformation est dénommée « modified Z transform ».

on pourra définir une nouvelle fonction pulsée de transfert du système qui sera fonction du paramètre Δ.

En faisant varier Δ de 0 à 1, on balaie tout l'intervalle entre échantillons et l'on est capable d'obtenir la réponse continue du système en utilisant les méthodes de calcul propres aux systèmes pulsés. Le retard fictif ne perturbe pas le système étudié, car il est toujours placé à la sortie donc en dehors du système.

Soit donc une réponse continue de la forme $F(p)$. Avec le retard fictif, on aura

$$F(p, \Delta) = F(p)\, e^{-\Delta T p} \qquad (0 < \Delta < 1).$$

La sortie retardée et échantillonnée aura pour expression

$$\mathfrak{Z}[F(p, \Delta)] = \mathfrak{Z}[F(p)\, e^{-\Delta T p}].$$

En utilisant la formule de multiplication dans le plan complexe s on obtient

$$(19) \quad \mathfrak{Z}[F(p, \Delta)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_2 - j\omega}^{c_2 + j\omega} F(s) \frac{e^{-\Delta T s}}{1 - e^{-T(p-s)}}\, ds$$

qu'on calcule comme précédemment par les résidus autour des pôles de $F(s)$ dans la demi-partie gauche du plan complexe s (*fig.* 29). Pour que l'expression sous le signe intégral soit analytique à l'infini, il faut remplacer Δ par $1 - m$, ce qui donne

$$(20) \quad \mathfrak{Z}[F(p, \Delta)] = \mathfrak{Z}[e^{-Tp} F(p)\, e^{mTp}] = \frac{e^{-Tp}}{2\pi j} \int_{c_2 - j\omega}^{c_2 + j\omega} \frac{e^{mTs} F(s)}{1 - e^{-T(p-s)}}\, ds,$$

avec la notation

$$Z = e^{+Tp} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Z}[F(p, m)] = \mathfrak{Z}[e^{-Tp} F(p)\, e^{mTp}]$$

on a

$$(21) \quad \mathfrak{Z}[F(p, m)] = F(Z, m) = \frac{Z^{-1}}{2\pi j} \left| \int \frac{e^{+mTs} F(s)\, ds}{1 - e^{-T(p-s)}} \right|_{z = e^{+Tp}} = Z^{-1} \sum_{\text{pôles de } F(s)} \text{résidus de } \frac{e^{mTs} F(s)}{1 - e^{-T(p-s)}}.$$

Cette expression est similaire à la formule obtenue au paragraphe 3.1, sauf pour la présence du facteur e^{mTs} qui conduit, tous calculs faits, à des numérateurs dans les transformées en Z avec retard $F(Z, m)$ dépendant tous de m. Les dénominateurs sont des expressions linéaires à coefficients constants en Z^{-n} comme trouvé précédemment. La table placée en Annexe donne un bon nombre de ces transformées associées aux transformées en Z sans retard.

La substitution de m à Δ dans la formule (19) s'explique parce que le retard exprimé par $e^{-\Delta T p}$ avec $0 \leq \Delta \leq 1$ introduit un phénomène de prédiction sur le premier échantillon à $T = 0$ (*fig.* 33 *a*). On décale alors le début d'échantillonnage d'un intervalle vers les temps positifs, ce que traduit le facteur de la formule (21) et le retard fictif ΔT devient une avance fictive de mT (*fig.* 33 *b*).

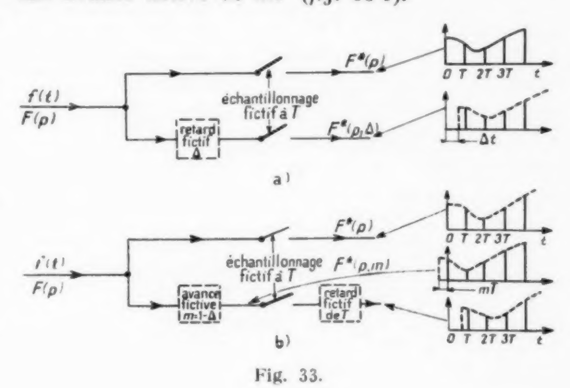


Fig. 33.

Comme au paragraphe 3.1, on obtient deux autres formes équivalentes de l'expression (20), mais sous forme de séries indéfinies

$$(22) \qquad F(Z, m) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(p + jk\Omega)\, e^{-(p+jk\Omega)(1-m)T},$$

$$(23) \qquad F(Z, m) = Z^{-1} \sum_{0}^{n} f(nT, m)\, Z^{-n}.$$

Ces expressions sont à rapprocher des formules (11) et (13).

On voit que la transformation en Z avec retard n'est qu'une variante de la transformation en Z conduisant aux mêmes types de calcul et aux mêmes propriétés. Les numérateurs sont d'une forme plus complexe dépendant de m, mais c'est par là que toute l'information entre échantillons est conservée.

3.5.2. Transformation inverse en Z avec retard. — On ne s'attardera pas sur cette transformation inverse qui est en tous points identique à celle décrite au paragraphe 3.5.

Deux approches sont possibles :

L'une conduit à une intégrale curviligne autour du cercle unitaire

$$(24) \quad F(n, m)\, T = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\substack{\text{cercle unitaire} \\ Z = 1}} F(Z, m)\, Z^{n-1}\, dZ$$

identique à la formule (18). Le calcul exige la décomposition de $F(Z, m)$ en fractions simples afin d'obtenir l'expression littérale de la réponse complète dans le temps.

L'autre approche permet de calculer facilement la réponse sur un nombre non infini d'échantillons par le procédé de la division continue de $F(Z, m)$, préalablement manipulée pour ne faire apparaître que des Z^{-q} au lieu des Z^{q}.

La division peut s'effectuer en gardant m comme paramètre, ce qui conduira à l'expression (23) ou en remplaçant m par plusieurs valeurs entre 0 et 1 dans $F(Z, m)$ et en effectuant à chaque fois la division continue. Le tableau I de présentation des calculs reste valable dans ce cas.

3.5.3. Propriétés des transformées $F(Z, m)$. — Elles ne diffèrent pas essentiellement de celles déjà étudiées.

3.5.3.1. *Linéarité. Superposition.* — Ces propriétés sont identiques à celles du paragraphe 3.3.1. On peut donc additionner plusieurs expressions $F_k(Z, m)$ à condition d'avoir adopté pour chacune une même définition du paramètre. On peut, de même, décomposer $F(Z, m)$ en expressions plus simples $F_k(Z, m)$ tel que

$$F(Z, m) = \sum F_k(Z, m).$$

3.5.3.2. *Théorèmes du produit.* — La transformation en Z avec retard ne peut s'appliquer qu'à des fonctions continues du temps définies, soit par $f(t)$, $F(p)$ ou $G(Z)\,F(p)$.

Les relations (14) et (15) du paragraphe 3.3.2 deviennent

$$\mathfrak{Z}_m[F(p)] = \mathfrak{Z}_m[G_1(p)\,G_2(p)] = G_1G_2(Z, m) \tag{25}$$

qui est différente de $G_1(Z, m)\,G_2(Z, m)$, car la transformation en Z avec retard doit s'appliquer à l'ensemble continu $G_1(p)\,G_2(p)$

$$\begin{aligned} Z_m[G(Z)\,F(p)] &= G(Z)\,Z[F(p)] \\ &= G(Z)\,F(Z, m). \end{aligned} \tag{26}$$

Ces deux expressions permettent d'obtenir la réponse ou la fonction de transfert pulsée aux instants $t = (n + 1 - m)T$ de tout système dont le signal de sortie est continu, quelle que soit sa configuration interne.

Dans le cas d'un système à échantillonnage interne, la fonction de transfert ou la réponse continue obtenue par la transformation de Laplace avec utilisation de la notation est toujours de la forme

$$G(p) = G_1(e^{-pT})\,G_2(p) = G_1(Z)\,G_2(p).$$

A ce stade, aucune partie de l'information n'est perdue et ne sera perdue si l'on poursuit l'analyse dans le plan complexe p. En appliquant à $G_2(p)$ seulement la transformation en Z avec retard on conservera toute l'information durant l'analyse tout en éliminant la multiplicité des pôles de $G_1(Z)$ dans le plan p. La figure 34 fournit les transformées en Z avec retard relatives aux structures déjà considérées à la figure 31.

3.5.3.3. *Systèmes possédant un retard réel.* — Considérons tout d'abord un système (*fig.* 34 *a*) à échantillonnage interne dont la sortie est pulsée. Sa transformée de Laplace s'exprime par

$$G(p)\,e^{-\delta T p} \qquad (\delta = \text{nombre positif}).$$

Suivant la valeur de δ, plusieurs cas sont possibles :

1° δ est un nombre entier, k et e^{-kT} représentent un retard de k échantillons. Le système étant entièrement pulsé, sa fonction de transfert pulsée s'obtient par

$$\mathfrak{Z}[G(p)\,e^{-kTp}] = e^{-kTp}\,\mathfrak{Z}[G_1(p)] = Z^{-k}\,G(Z),$$

ce qui revient à calculer la fonction de transfert pulsée de $G(p)$.

2° δ est compris entre 0 et 1. On retrouve la situation qu'on avait créée dans l'analyse avec le retard fictif. En faisant

$$m_\delta = 1 - \Delta = 1 - \delta$$

et en introduisant cette valeur dans la transformée en Z avec retard de $G(p)$, on obtient la fonction de transfert pulsée du système

$$\mathfrak{Z}[G(p)\,e^{-\delta T p}] = \mathfrak{Z}_{m_\delta}[G(p)] = G(Z, m)\,|_{m = m_\delta = 1-\delta}.$$

3° Si δ est quelconque tel que $\delta = k + \eta$, avec k nombre entier $(0 < \eta < 1)$, on démontrerait aisément qu'on a

$$\mathfrak{Z}[G(p)\,e^{-\delta T p}] = e^{-kTp}\,\mathfrak{Z}_{\eta}[G(p)] = Z^{-k}\,G(Z, m)|_{m=1-\eta}.$$

Ces expressions peuvent servir pour n'importe quelle configuration de système pulsé, en cascade comme en boucle fermée.

Si le système considéré possède une sortie continue et un retard interne réel (*fig.* 34 *b*) il est désirable d'utiliser la transformation avec retard fictif pour conserver l'information entre échantillons. Le retard fictif utilisé pour l'analyse s'ampute du retard réel.

Structure de base.	Transformée en Z avec retard du signal de sortie.	Transformée en Z du signal de sortie.
A	$\dfrac{E(Z)\,G(Z,\,m)}{1+HG(Z)}$	$\dfrac{E(Z)\,G(Z)}{1+HG(Z)}$
B	$\dfrac{G(Z)\,E(Z)}{1+H(Z)\,G(Z)}$	$\dfrac{G(Z)\,E(Z)}{1+H(Z)\,G(Z)}$
C	$GE(Z,\,m)-\dfrac{GH(Z,\,m)\,EG(Z)}{1+HG(Z)}$	$\dfrac{EG(Z)}{1+HG(Z)}$
D	$\dfrac{EG_1(Z)\,G_2(Z,\,m)}{1+HG_1G_2(Z)}$	$\dfrac{EG_1(Z)\,G_2(Z)}{1+HG_1G_2(Z)}$
E	$\dfrac{G_1(Z)\,E(Z)\,G_2(Z,\,m)}{1+G_1(Z)\,G_2H(Z)}$	$\dfrac{G_1(Z)\,E(Z)\,G_2(Z)}{1+HG_2(Z)\,G_1(Z)}$

Fig. 34. — Transformées des signaux de sortie de quelques structures de base.

Trois cas sont à envisager :

1° $\delta = k$, nombre entier. A partir de $G(p)$, la fonction de transfert pulsée s'obtient par

$$\mathfrak{Z}_m[G(p)\,e^{-kTp}] = Z^{-k}\,G(Z,\,m).$$

2° Si $0 \leq \delta \leq 1$, la transformation en Z et en m sera celle des tables à condition de tenir compte du retard réel dans le calcul en remplaçant m par m tel que :

$$m' = m + \delta - 1 \qquad \text{quand} \quad 0 < m' < \delta$$

et

$$m' = m + \delta \qquad \text{quand} \quad \delta < m' < 1.$$

Fig. 35.

Ces deux cas sont indispensables, car la transformation en Z avec retard telle qu'on la définit impose que m soit compris entre 0 et 1.

On aura donc

$$0 < m' < \delta, \qquad \mathfrak{Z}_m[G(p)\,e^{-\delta Tp}] = G(Z,\,m') \quad (m' = m + \delta - 1),$$

$$\delta < m' < 1, \qquad \mathfrak{Z}_m[G(p)\,e^{-\delta Tp}] = G(Z,\,m') \quad (m' = m + \delta).$$

3° Si $\delta = k + \eta$ avec k = nombre entier et $0 \leq \eta \leq 1$, on a

$$\mathfrak{Z}_m[G(p)\,e^{-\delta Tp}] = Z^{-k}\,G(Z,\,m'),$$

Structure de base.	Transformée en Z avec retard : $S(Z, m')$.	Transformée en Z : $S(Z)$.
A	$\dfrac{G(Z, m')_{m'=m+\delta+x}}{1+GH(Z, m)_{m+1-\delta}}$ avec $x=-1$ si $0 < m' < \delta_1$, $x=0$ si $\delta_1 < m' < 1$	$\dfrac{G(Z, m)_{m=1-\delta}}{1+GH(Z, m)_{m=1-\delta}}$
B	$\dfrac{G(Z, m')_{m'=m+\delta_1+x}}{1+GH(Z, m)_{m=1-\delta_1-\delta_2}}$ avec $x=-1$ si $0 < m' < \delta_1$, $x=0$ si $\delta_1 < m' < 1$	$\dfrac{G(Z, m)_{m=1-\delta_1}}{1+GH(Z, m)_{m=1-\delta_1-\delta_2}}$
C	$\dfrac{G(Z, m')_{m'=m+\delta_1+x}}{1+G(Z, m)_{m=1-\delta_1} H(Z, m)_{m=1-\delta_2}}$ avec $x=-1$ si $0 < m' < \delta_1$, $x=0$ si $\delta_1 < m' 1 <$	$\dfrac{G(Z, m)_{m=1-\delta_1}}{1+G(Z, m)_{m=1-\delta_1} H(Z, m)_{m=1-\delta_2}}$
D	$\dfrac{G_1(Z, m)_{m=1-\delta} G_2(Z, m')_{m'=m}}{1+G_2H(Z) G_1(Z, m)_{m=1-\delta}}$	$\dfrac{G_1(Z, m)_{m=1-\delta} G_2(Z)}{1+G_2H(Z) G_1(Z, m)_{m=1-\delta}}$
E	$\dfrac{G_2(Z, m')_{m'=m+\delta_2+x} G_1(Z, m)_{m=1-\delta_1}}{1+G_1(Z, m)_{m=1-\delta_1} HG_2(Z, m)_{m=1-\delta_2}}$ avec $x=-1$, $0 < m' < \delta_2$; $x=0$, $\delta_2 < m' < 1$	$\dfrac{G_2(Z, m)_{m=1-\delta_2} G_1(Z, m)_{m=1-\delta_1}}{1+G_1(Z, m)_{m=1-\delta_1} HG_2(Z, m)_{m=1-\delta_2}}$

Fig. 36. — Transformées des signaux de sortie de structures de base comprenant des retards réels.

avec

$$m' = m + \gamma_1 - 1 \quad \text{pour} \quad 0 < m' < \gamma_1,$$
$$m' = m + \gamma_1 \quad \text{pour} \quad \gamma_1 < m' < 1.$$

Le paramètre m' définit le décalage fictif auquel on soumet la sortie continue avant l'échantillonnage fictif. La table des transformées en Z avec retard s'obtient à partir de la table des transformées en Z sans retard en remplaçant m, soit par $m' - \gamma_1 + 1$, soit par $m' - \gamma_1$ suivant que m' est inférieur ou supérieur à γ_1. L'expression est alors fonction du seul paramètre m' et on l'écrit sous la forme symbolique : $G(Z, m')$.

La figure 36 donne les transformées de quelques structures avec retard.

3.5.3.4. *Valeur initiale et finale de $F(Z, m)$*. — On sait que le paramètre m permet le balayage de toutes les valeurs de $f(t)$ dans l'intervalle entre échantillons. Il n'introduit pas de différence fondamentale entre $F(Z)$ et $F(Z, m)$.

La valeur à l'infini de $f(t)$ est obtenue suivant la même formule que l'expression (16) déjà trouvée, soit

$$f(\infty, m) = \lim\,(1 - Z^{-1})\,F(Z, m)\,|_{Z=1}.$$

Mais dans ce cas on garde la possibilité en faisant varier m de connaître le comportement de $f(t)$ à l'infini entre échantillons. Si, notamment, $f(t)$ est la réponse d'un système à un échelon unitaire et que

$$\lim\,(1 - Z^{-1})\,F(Z, m)\,|_{Z=1}$$

ne comporte aucun terme en m, on en déduit que la réponse à l'infini est absolument constante. La présence de termes en m indiquerait la présence d'oscillations à l'infini.

L'expression donnant $f(0)$ est identique à la formule (17) avec toutefois les deux possibilités suivant que m tend vers zéro ou vers un.

Si m tend vers zéro, on atteint la valeur de $f(t)$ aux instants d'échantillonnage par valeurs immédiatement inférieures, soit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(0 - \varepsilon t) = \lim_{Z \to \infty} \{\,|\,F(Z, m)\,|_{m \to 0}\,\}.$$

Si m tend vers un, c'est par les valeurs immédiatement supérieures que la valeur aux temps d'échantillonnage est atteinte, donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(0 + \varepsilon t) = \lim_{Z \to \infty} \{\,|\,F(Z, m)\,|_{m \to 1}\,\}.$$

3.5.3.5. *Minimum et maximum d'une expression $F(Z, m)$*. — Si $F(Z, m)$ est la transformée de la réponse d'un système, il est intéressant de pouvoir calculer l'emplacement exact des premiers maxima et minima.

Deux voies sont possibles :

1° On possède la réponse du système sous la forme d'une série

$$F[(n + m)T] = f(0, m) + Z^{-1} f(1, m) + Z^{-2} f(2, m)\ldots$$

obtenue par division continue de $F(Z, m)$ avec conservation du paramètre m. Les dérivées par rapport à m

$$f'(0, m) = \frac{\mathrm{d}f(0, m)}{\mathrm{d}m}, \qquad f'(1, m) = \frac{\mathrm{d}f(1, m)}{\mathrm{d}m}, \qquad \ldots$$

sont calculées et égalées à 0,

$$f'(0, m) = 0, \qquad f'(1, m) = 0, \qquad \ldots.$$

La résolution par rapport à m de ces égalités fournit les valeurs de m correspondant aux maximums et aux minimums pour

$$0 < t < T, \qquad T < t < 2T, \qquad 2T < t < 3T, \qquad \ldots.$$

2° On peut différencier $F(Z, m)$ par rapport à la variable indépendante m, comme indiqué au paragraphe 3.2.2 pour ensuite développer par une longue division, l'expression ainsi obtenue

$$F'(Z, m) = \frac{\mathrm{d}F(Z, m)}{\mathrm{d}m}$$
$$= f(0, m) + Z^{-1} f'(1, m) + Z^{-2} f'(2, m) + \ldots.$$

La résolution de

$$f'(0, m) = 0, \qquad f'(1, m)\,| = 0, \qquad \ldots$$

conduit aux valeurs de m recherchées.

Ces propriétés seront utilisées dans les exemples du chapitre 5.

4. ANALYSE DE LA STABILITÉ.

4.1. Généralités.

L'étude des systèmes à information pulsée comportant des boucles de retour conduit en général à l'analyse de fonctions de transfert pulsées de la forme

$$\frac{1}{1 + H(Z)}.$$

On retrouve ici une formule analogue à celle rencontrée dans les systèmes continus $\frac{1}{1 + G(p)}$, les symboles p et Z jouant le même rôle de variable complexe. Les termes $G(p)$ et $H(Z)$ se rapportent

Fig. 36. — Transformées des signaux de sortie de structures de base comprenant des retards réels.

à des éléments physiques stables dont le comportement ne peut être complètement arbitraire. Notamment des questions de dissipation et de conservation de l'énergie font que les termes $H(Z)$ et $G(p)$ ne peuvent avoir de partie réelle négative. Dans les expressions ci-dessus, les dénominateurs peuvent s'annuler pour certaines valeurs de p et Z, ce qui caractérise l'instabilité absolue. Le signal de sortie croît au-delà de toute limite si le système est idéal, sinon il se limite à un état, forme et amplitude, qui rend le système ainsi saturé inutilisable. Donc pour tous les systèmes composés d'éléments stables qui, après réduction, conduisent à des expressions de la forme indiquée ci-dessus, il est impératif de vérifier leur stabilité absolue afin de pouvoir l'utiliser à des asservissements ou contrôles. Dans ce qui suit, on a limité l'étude de la stabilité des systèmes pulsés à la stabilité absolue qui est définie comme ci-dessus par la résistance à un accroissement non contrôlé des échantillons de sortie. La stabilité relative ou facilité que présente le système à retrouver un état d'équilibre après une perturbation est définie moins facilement à partir de la fonction de transfert pulsée. Même si l'échantillonnage est effectué à une fréquence correcte, la suite des échantillons n'a pas les mêmes caractéristiques que la fonction continue.

Structure de base.	Transformée de Laplace de la grandeur de sortie S(p).	Transformée en Z.
A — $E(p)$, Σ, G, -H, $S(p)$	$\dfrac{G(p)\,E^*(p)}{1+HG^*(p)}$	$\dfrac{G^*(Z)\,E^*(Z)}{1+H^*(Z)\,G^*(Z)}$
B — $E(p)$, Σ, G, -H, $S(p)$	$\dfrac{G^*(p)\,E^*(p)}{1+H^*(p)\,G^*(p)}$	$\dfrac{G^*(Z)\,E^*(Z)}{1+H^*(Z)\,G^*(Z)}$
C — $E(p)$, Σ, G, -H, $S(p)$	$G(p)\left[E(p)-\dfrac{H(p)\,EG^*(p)}{1+HG^*(p)}\right]$	$\dfrac{EG^*(Z)}{1+HG^*(Z)}$
D — $E(p)$, Σ, G_1, G_2, -H, $S(p)$	$\dfrac{G_2(p)\,EG_1^*(p)}{1+HG_1G_2^*(p)}$	$\dfrac{G_2^*(Z)\,EG_1^*(Z)}{1+HG_1G_2^*(Z)}$
E — $E(p)$, Σ, G_1, G_2, -H, $S(p)$	$\dfrac{G_2(p)\,G_1^*(p)\,E^*(p)}{1+G_1^*(p)\,G_2H^*(p)}$	$\dfrac{G_1^*(Z)\,G_2^*(Z)\,E^*(Z)}{1+G_1^*(Z)\,G_2H^*(Z)}$

Fig. 37. — Table de la transformée en Z de structures de base.

Le rebondissement et le temps à atteindre un équilibre, par exemple, ne sont pas les mêmes pour les deux fonctions.

On est tenté d'utiliser pour les systèmes pulsés, les méthodes en vigueur pour les systèmes continus, d'autant plus que l'analogie des formules y incite. Ceci a été entrepris par de nombreux auteurs en utilisant le plan complexe de la variable Z au lieu de celui de p. Les conditions valables dans un plan sont transformées suivant la transformation conforme indiquée au paragraphe 3.2.2. Ainsi la stabilité absolue est définie par l'absence de pôles de $\frac{1}{1+G(Z)}$ sur et à l'extérieur du cercle de rayon unité dans le plan complexe des Z. Il serait donc souhaitable d'étudier la répartition des pôles de la fonction de transfert pulsée globale par un moyen simple, tel qu'un critère, sans avoir à déterminer exactement leur emplacement. Trouver si les racines d'une expression comme $1 + G(p)$ sont à droite ou à gauche d'un axe vertical est chose aisée par les critères bien connus de Routh ou Hurwitz. Aussi, il a été proposé [4] d'effectuer une transformation conforme faisant correspondre l'intérieur d'un cercle unité à la partie gauche d'un plan. La transformation

$$Z = \frac{1+w}{1-w}$$

répond à cette condition. Il est alors possible d'utiliser les tests de Routh et Hurwitz sur le numérateur de la fonction en w obtenue en substituant

$$Z = \frac{1+w}{1-w}$$

dans l'expression $1 + G(Z)$. On ne s'attardera pas sur ces procédés qui sont bien connus. Il est aussi possible, par le calcul, d'établir à l'aide du critère de Schur-Cohn si les racines d'un polynome en Z sont à l'intérieur d'un cercle. Ces critères permettent de vérifier qu'un système est stable ou fournissent la limite du gain en boucle ouverte au-delà de laquelle le système devient instable. Dans le cas d'un système instable, ces critères sont incapables d'indiquer l'amélioration à apporter.

Les procédés graphiques ont prouvé leur efficacité pour évaluer la stabilité et améliorer une stabilité médiocre dans le cas des systèmes continus. Pour les systèmes discontinus ils s'avèrent aussi d'une grande utilité. On va décrire la méthode d'étude par la réponse isochrone et par le tracé du lieu des racines de $1 + G(Z)$ (en anglais dénommé « Root-Locus ») dans le plan complexe en Z.

4.2. Diagramme de la réponse isochrone dans le plan $K\,G(Z)$.

Cette méthode consiste à tracer dans le plan complexe les points représentant les valeurs de la fonction de transfert pulsée du système en boucle ouverte pour Z parcourant la courbe limite $\Gamma(Z)$ du domaine de stabilité. Connaissant le nombre de zéros de $K\,G^{*}(Z)$ à l'extérieur de la surface limitée par $\Gamma(Z)$ et déterminant le nombre d'encerclements effectués autour du point $-1 + j0$ lorsque le diagramme est parcouru dans le sens correspondant au sens de parcours le long de $\Gamma(Z)$, on en déduit le nombre de pôles de $K\,G(Z)$ à l'extérieur du domaine de stabilité. Le problème est donc de tracer ce diagramme pour des valeurs de Z qui correspondent au cercle unité dans le plan complexe Z. La difficulté par rapport à la variable $p = j\omega$, réside dans la présence de parties réelle et imaginaire pour les valeurs de Z considérées. Au lieu de décomposer Z en $X + jY$ on utilise la formule $Z = \rho\, e^{j\theta}$ en prenant pour θ des valeurs telles que $\frac{\omega_0}{k}$, k nombre entier correspondant à des valeurs sous-multiples de la fréquence d'échantillonnage. Souvent $K\,G(Z)$ se présente sous la forme d'un rapport de deux fonctions rationnelles en Z, tel que

$$K\,G(Z) = \frac{a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots + a_n Z^n}{b_0 + b_1 Z + b_2 Z^2 + \ldots + b_m Z^m},$$
$$\text{avec} \quad m \geq n.$$

Pour différentes valeurs de K, les modules et arguments des termes, d'une part au numérateur, d'autre part au dénominateur, sont additionnés pour en prendre respectivement le quotient des modules et la différence des arguments. Comme il a été remarqué pour $K = 1$ et ∞ (intersections du cercle unité avec l'axe réel) Z est réel, donc $K\,G(Z)$ est aussi réel, sauf dans le cas où $K\,G(Z)$ présente un pôle à $Z = 1$. Cette situation est très fréquente, car elle correspond à la présence d'un pôle $p = 0$ dans $G(s)$, provenant d'un élément de la forme

$$G_1(p) = \frac{1}{p(p+a)}$$

comme un moteur. Le pôle à $Z = 1$ est alors mis en facteur et le reste de la fonction est étudié comme auparavant. Le facteur $\frac{1}{Z-1}$ est représenté par une droite verticale d'abscisse $-\frac{1}{2}$ dans le plan $K\,G(Z)$ et les deux courbes sont multipliées graphiquement pour des valeurs autres que $Z = 1$ ou $\theta = 0$.

Pour $\theta = 0$ le parcours dans le plan Z est un cercle centré à $1 + j0$ et de rayon infiniment petit. En faisant tendre ce rayon vers zéro et en reproduisant les modifications qu'il en résulte pour les deux courbes à composer $\frac{1}{Z-1}$ et $K\,G(Z)\,(Z-1)$ on trouve le diagramme complet de $K\,G(Z)$ pour Z parcourant le cercle unité et le cercle entourant la singularité à l'origine.

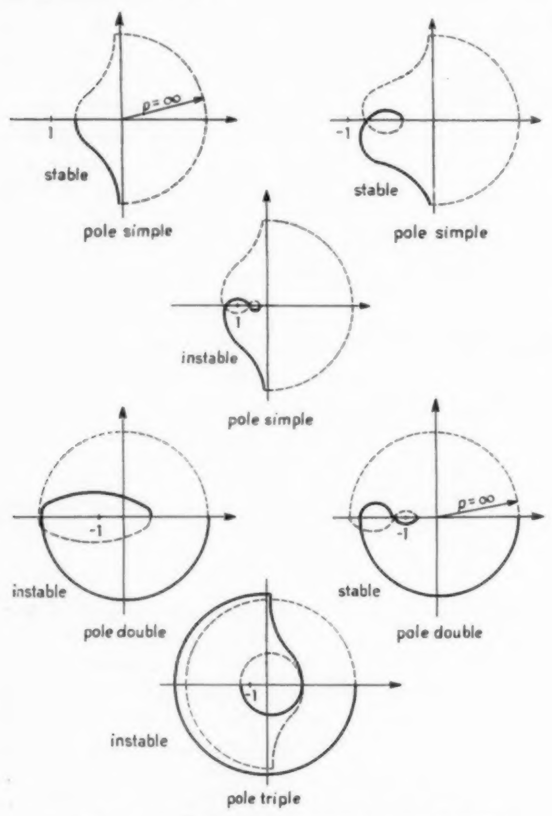


Fig. 38. — Diagrammes typiques de $K\,G(e^{j\omega T})$ dans le plan complexe $K\,G(Z)$ suivant le nombre de pôles à $Z = 1$.

En supposant que l'expression $K\,G(Z)$ ne possède pas de zéros à l'extérieur du cercle unité, le système sera stable si le vecteur $K\,G(Z)$ n'effectue pas de rotation lorsqu'on parcourt le cercle unité de -1 à $+1$ par valeurs croissantes négatives, puis de $+1$ à -1 par valeurs croissantes positives. Cette règle permet de vérifier la stabilité des systèmes dont les diagrammes sont donnés à la figure 38 pour un pôle simple ou double ou triple à $Z = 1$. Dans les deux derniers cas, le point $-1 + j0$ est toujours entouré par un cercle bouclant le chemin de parcours à l'infini sans pour cela que le système soit instable comme dans le cas des systèmes continus. Si le système n'est composé que d'une seule boucle possédant un gain K il est plus commode de représenter $G(Z)$ seulement et d'étudier l'encerclement du point $-\frac{1}{K}$ qui se meut suivant la valeur du gain K. Les régions de stabilité et d'instabilité se déterminent aisément en fonction de K sans avoir à retracer de nouvelle courbe.

Parfois la fonction $K\,G(Z)$ se présente sous une forme décomposée, soit

$$K\,G(Z) = \frac{1}{Z-b_1} + \frac{1}{Z-b_2} + \ldots,$$

soit

$$K\,G(Z) = \frac{(Z-a_1)(Z-a_2)\ldots}{(Z-b_1)(Z-b_2)\ldots},$$

où apparaissent des termes de forme $Z - a$ et $\frac{1}{Z-a}$. Lorsque Z parcourt le cercle unité, ces termes sont représentés dans le plan complexe des $K\,G(Z)$ par des cercles, le premier étant le cercle unité mais déplacé de a vers la gauche, le second étant son inverse géométrique (inversion, centre O, puissance $= 1$) et parcouru en sens inverse du premier. Pour rendre ces derniers cercles [6] utilisables dans tous les cas, on les a gradués en valeurs de K comme indiqué sur la figure 39. K varie de $+1$ à ∞, ce qui permet de couvrir les fréquences de $-\frac{\Omega}{2}$ à $+\frac{\Omega}{2}$. La procédure à suivre est la même que précédemment, mais avec les arguments et modules des termes $Z - a$ et $\frac{1}{Z-a}$ pour des valeurs correspondantes de K.

A titre d'exemple, la construction du diagramme de

$$G(Z) = \frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z-0{,}7} = \frac{0{,}3\,Z}{(Z-1)(Z-0{,}7)}$$

est donnée à la figure 40.

Le diagramme de $\frac{0{,}3\,Z}{(Z-1)(Z-0{,}7)}$ est effectué en premier à l'aide du cercle $\frac{-1}{Z-0{,}7}$ et de la droite $\frac{1}{Z-1}$ et est ensuite multiplié par Z qui se réduit à une rotation. Le diagramme ressemble aux formes rencontrées dans l'étude des systèmes continus faite dans le plan complexe $K\,G(p)$. Il ne faut d'ailleurs pas se méprendre sur l'équivalence des deux représentations. Le passage par l'expression pulsée exprimée en Z et décomposée en

ses parties réelles et imaginaires pour Z parcourant le cercle unité revient à décomposer l'expression $G(e^{pT})$ quand p parcourt l'axe imaginaire du plan complexe p. Les diagrammes de $G(Z)$ et $G(e^{pT})$ sont donc bien identiques et les méthodes d'analyse utilisées pour l'un s'appliquent à l'autre. Notamment les courbes d'égal gain et d'égale phase de la boucle fermée sont données en calculant

$$M = \left| \frac{K\,G(Z)}{1 + K\,G(Z)} \right| = \frac{K\,G(e^{pT})}{1 + K\,G(e^{pT})}$$

et

$$\Phi = \text{Arg.}\,\frac{G(Z)}{1 + G(Z)} = \text{Arg.}\,\frac{G(e^{pT})}{1 + G(e^{pT})}$$

pour Z sur le cercle unité en p sur l'axe des fréquences.

En remplaçant $K\,G(Z)$ par $X + jY$, on trouve pour les lieux de M constant une famille de cercle d'équation

$$\left(X - \frac{M^2}{1 + M^2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{M}{1 + M^2}\right)^2$$

et pour c une famille de cercles orthogonaux. Ces familles de cercles sont identiques à celles qu'on trace dans le plan complexe p [5]. La famille des cercles M peut être utilisée comme critère de comparaison de différents systèmes présentant ou non de la surtension dans leur caractéristique isochrone. De même, la marge de phase pour un gain unité ou la marge de gain pour une phase de — 180° sont justifiables du même emploi que dans les systèmes continus pour la recherche d'un circuit de compensation. Cependant, si l'emploi de la variable Z n'est qu'une forme déguisée de la variable p, sa manipulation réclame quelques précautions supplémentaires. L'introduction d'un circuit correcteur digital dans un circuit pulsé revient à la multiplication des deux fonctions de transfert et à la composition des deux diagrammes représentatifs dans le plan complexe. Cette propriété fait préférer cette représentation graphique lorsque l'ingénieur doit améliorer un système du point de vue de la stabilité. (Le problème de la compensation dépassant le cadre de cet article, nous prions le lecteur de se reporter aux articles déjà parus sur ce sujet.) Mais si l'élément introduit a un fonctionnement continu qui se combine avec le fonctionnement continu d'un élément adjacent, la courbe dans le plan complexe $K\,G(Z)$ doit être complètement recalculée.

Une autre limitation, celle-ci d'importance ma-

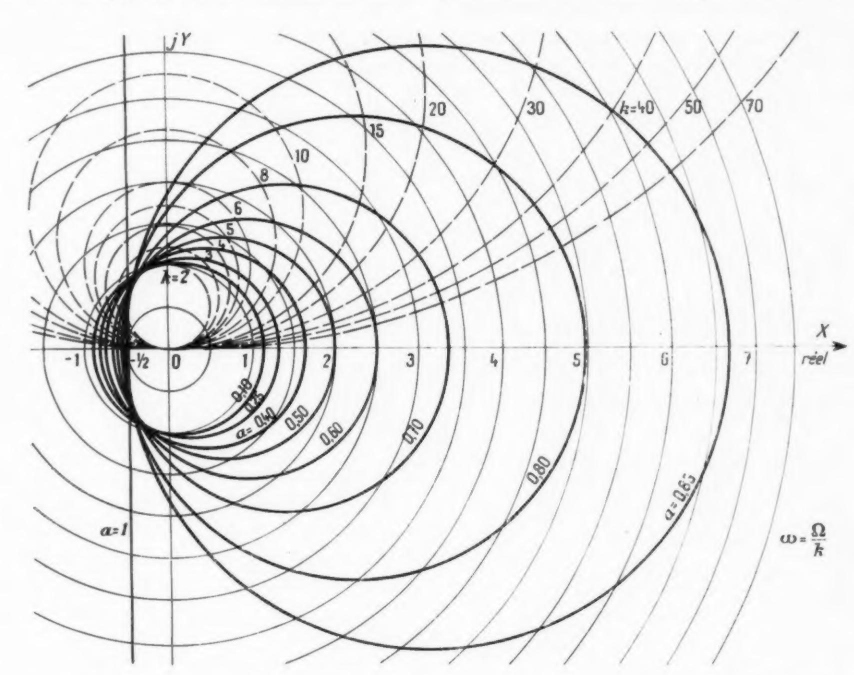


Fig. 39. — Diagrammes de $\frac{1}{Z - a}$ dans le plan complexe $Z = X + jY$ pour différentes valeurs de a.

(5) Se reporter : M. CHESNUT et R. MAYER, *Servomechanisms and regulating system design* t. I, p. 227-228.

jeure, provient du fait que les courbes du gain et de la phase de $K\,G\,(e^{pT})$ en fonction de la pulsation ω telle que $p = j\omega$ qu'on peut construire à partir des diagrammes précédents ne peuvent être utilisées que dans le domaine fréquentiel. Diverses méthodes ont été proposées pour déterminer la réponse temporelle des systèmes à certains signaux d'entrée à partir de la réponse fréquentielle de systèmes continus. Elles sont longues et ne s'appliquent

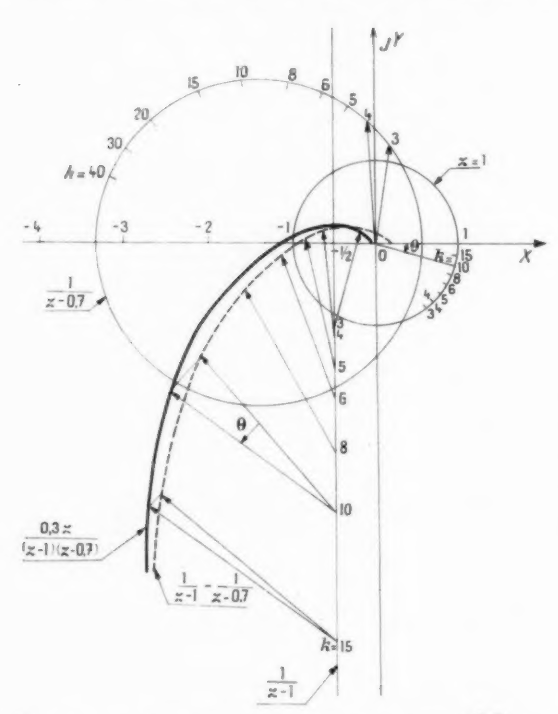


Fig. 40. — Construction de $K\,G\,(Z) = \dfrac{0{,}3\,Z}{(Z-1)(Z-0{,}7)}$ à partir des tracés de Z, $\dfrac{1}{Z-1}$, $\dfrac{1}{Z-0{,}7}$.

qu'à un spectre limité en fréquence et non pas périodique. A partir du diagramme $K\,G\,(Z)$ on peut tracer les variations de l'amplitude et de la phase de $K\,G\,(Z)$ en fonction de ω, ce qui conduit à des courbes [26] comme celles de la figure 41, la fréquence étant limitée à $\pm\,\frac{\Omega}{2}$.

En juxtaposant des courbes identiques et en nombre infini (*fig.* 42), on obtient le spectre de fréquence de la réponse pulsée à une impulsion unité. Ce spectre est périodique comme attendu. La partie comprise entre $\pm\,\frac{\omega_0}{2}$ peut représenter le spectre de fréquence de la réponse impulsionnelle d'un système continu ayant subi un échantillonnage final. Si cet échantillonnage a été mal conçu, soit qu'il soit trop lent pour tenir compte des spectres des signaux et des éléments étudiés, soit qu'il ait caché à l'ingénieur un phénomène périodique se situant dans l'intervalle des échantillons, il n'est alors plus possible de retrouver la réponse continue

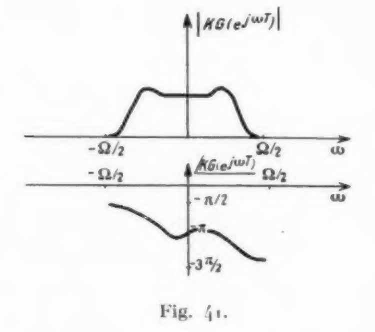


Fig. 41.

à partir de ces courbes. La méthode d'analyse de la stabilité présentée ne s'applique donc qu'aux échantillons et ne permet pas de retrouver ou de tenir compte d'une façon rigoureuse de la réponse du système entre échantillon. Comme dans les systèmes continus, l'étude de la fonction de transfert en boucle ouverte,

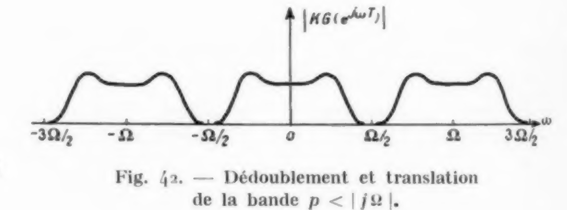


Fig. 42. — Dédoublement et translation de la bande $p < |\,j\Omega\,|$.

permet d'apprécier la stabilité en régime permanent et c'est par constructions supplémentaires que les régimes transitoires sont approximativement évalués. Pour l'étude de ces derniers, le tracé du lieu des racines complexes de $1 + K\,G\,(Z)$ est plus approprié et il fera l'objet d'un paragraphe ultérieur. A ce moment, le comportement du système entre échantillons pourra être considéré plus en détail.

Avant d'aborder cette partie il est nécessaire de mentionner une construction graphique qui permet d'évaluer la stabilité plus aisément dans le cas où le système étudié est caractérisé graphiquement par sa réponse isochrone en transmission continue.

4.3. Diagramme de $K\ G(Z)$ à partir de $K\ G(p)$.

Considérons un système quelconque à transmission continue dont on possède le diagramme $K\ G(p)$ dans le plan complexe de la fonction de transfert en boucle ouverte. L'expression analytique de cette fonction n'est pas nécessairement disponible. Le problème revient à trouver simplement $K\ G(Z)$ à partir de $K\ G(p)$ [26], [10].

Le passage de la fonction en continu à celle en régime pulsé peut se faire selon trois expressions dont la suivante :

$$G(Z) = \frac{1}{T}\sum_{+\infty}^{-\infty} G(jn\Omega + p)$$

convient au problème mentionné.

Si $p = 0$, on a

$$(27)\quad G(Z) = \frac{1}{T}[G(0) + G(j)\Omega + G(-j\Omega) + G(2j\Omega) + G(-2j\Omega) + \dots] = G^*(0).$$

Si $p = \frac{\Omega}{2}$,

$$(28)\quad G\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{T}\left[G\left(\frac{j\Omega}{2}\right) + G\left(\frac{3j\Omega}{2}\right) + G\left(-\frac{j\Omega}{2}\right) + G\left(-\frac{3j\Omega}{2}\right) + \dots\right].$$

Les termes sont conjugués par paires pour ces deux valeurs de p.

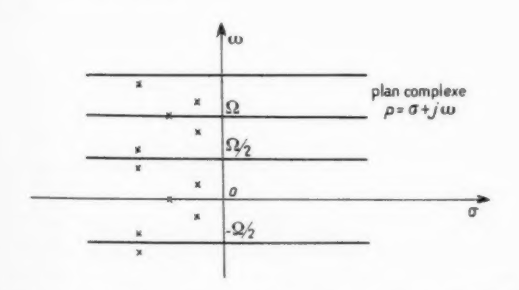


Fig. 43. — Dédoublement et translation de la bande p.

Ces deux valeurs jouent un rôle privilégié, car les racines de $G(p)$ sont disposées symétriquement par rapport à $p = j\Omega\frac{n}{2}$, n prenant toutes les valeurs entières y compris 0 (se reporter à la figure 43). Cette symétrie peut s'exprimer ainsi en considérant un écart de $\Delta\omega$ près de $\frac{j\Omega}{2} = p$,

$$G\left(\frac{j\Omega}{2} + j\Delta\omega\right) = \text{conj. de } G\left(-\frac{j\Omega}{2} - j\Delta\omega\right),$$

$$G\left(\frac{j\Omega}{2} - j\Delta\omega\right) = \text{conj. de } G\left(-\frac{j\Omega}{2} + j\Delta\omega\right),$$

donc

$$(29)\quad G\left(\frac{j\Omega}{2} + j\Delta\omega\right) = G\left(-\frac{j\Omega}{2} + j\Delta\omega\right) = \text{conj. de } G\left(\frac{j\Omega}{2} - j\Delta\omega\right)$$

et, en décomposant,

$$R\left[G\left(\frac{j\Omega}{2} + j\Delta\omega\right)\right] = R\left[G\left(\frac{j\Omega}{2} - j\Delta\omega\right)\right],$$

$$J\left[G\left(\frac{j\Omega}{2} + j\Delta\omega\right)\right] = -J\left[G\left(\frac{j\Omega}{2} - j\Delta\omega\right)\right].$$

Donc près de $\frac{\Omega}{2}$ les parties réelles sont égales et les parties imaginaires sont de signe opposé. Sur le graphique, cela se traduit par une symétrie autour d'un axe horizontal qui ne peut être que l'axe réel, puisque $G^*\left(\frac{j\Omega}{2}\right)$ est réel. Tout en vérifiant les tracés précédents cette symétrie semble indiquer l'intérêt qu'il y a à effectuer la sommation $\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{\infty} G(jn\Omega + p)$ autour de $p = \frac{j\Omega}{2}$. Ainsi on transforme l'équation (28) en

$$G^*\left[\frac{j\Omega}{2} + \Delta\omega\right] = \frac{1}{T}\left[G\left(\frac{j\Omega}{2} + \Delta\omega j\right) + \text{conj. } G\left(\frac{j\Omega}{2} - j\Delta\omega\right)\right] + G\left(\frac{3\Omega j}{2} + \Delta\omega j\right) + \text{conj. } G\left(\frac{3\Omega j}{2} - j\Delta\omega\right),$$

d'après la formule (29).

Toutes ces valeurs de $G(p)$ se trouvent placées sur la même branche de la courbe $G(j\omega)$ dans le plan complexe et il est aisé d'additionner ces vecteurs. Dans tous les cas physiques, la courbe de $G(j\omega)$ s'enroule autour de l'origine lorsque ω croît vers les valeurs élevées et l'influence des vecteurs représentatifs de $G\left(j\frac{n+1}{2}\Omega + \Delta\omega\right)$ quand n est grand, devient négligeable. D'autre part, si la condition d'échantillonnage a bien été respectée, (affaiblissement presque infini de $G(j\omega)$ pour $\omega \geq \frac{\Omega}{2}$), cet apport est négligeable. Il reste à composer géo-

métriquement deux vecteurs correspondant à des pulsations symétriquement placées par rapport à $\frac{\Omega}{2}$. Afin d'exécuter correctement et méthodiquement les constructions, un tableau des vecteurs à additionner est établi, comme celui indiqué ci-après pour le cas où $\frac{\Omega}{2} = 5$ et où $\Delta\omega$ varie par unité (rad/s).

$\Delta\omega$	0	1	2	3	4	5
$\frac{\Omega}{2} + \Delta\omega$	5	6	7	8	9	10
$-\frac{\Omega}{2} + \Delta\omega$	−5	−4	3	2	1	0

Pour $\Delta\omega$ supérieur à $\frac{\Omega}{2} > 5$, on retrouve les valeurs conjuguées pour $\Delta\omega = 4, 3, 2, 1, \ldots$ du fait de la symétrie. La construction de $KT\ G^*(j\omega)$ est indiquée à la figure 44 pour $\Omega = 10$. Le vecteur $\vec{5}$

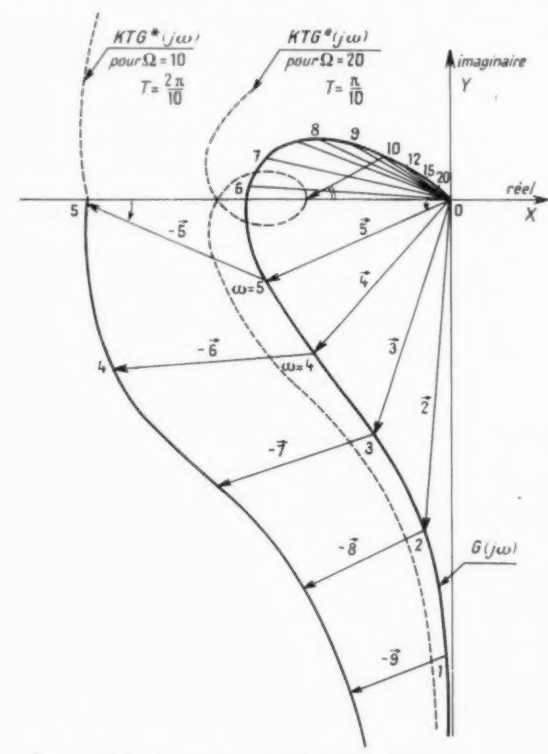


Fig. 44. — Construction de $K\ G\,(e^{j\omega T})$ dans le plan complexe à partir de $K\ G\,(j\omega)$.

correspondant à $\omega = 5$ est composé avec le conjugué de $\vec{5}$, $\vec{4}$ est composé avec le conjugué de $\vec{6}$ et ainsi de suite. Sur la même figure est représentée la courbe correspondant à $\Omega = 20$. Cette courbe épouse plus fidèlement la forme de $G\,(j\omega)$. En augmentant on se rapproche de Ω puisque l'échantillonnage se fait à plus haute fréquence, ce qui concerve plus d'information de la courbe échantillonnée.

Au point de vue de la stabilité, ces deux courbes montrent que l'échantillonnage à basse fréquence tend à rendre le système instable. Ce caractère se comprend aisément, car plus l'échantillonnage est lent, plus longtemps la boucle de retour reste ouverte laissant le système travailler sans contrôle. Le facteur T intervenant par ailleurs, a pour effet d'aggraver cette instabilité aux fréquences basses d'échantillonnage en déplaçant la courbe $K\ G^*(j\omega)$ plus à gauche de l'axe des imaginaires.

Ce procédé graphique quoique approximatif est d'une application rapide pour évaluer l'influence de la période T sur la stabilité. Cette influence n'est rencontrée qu'à l'échantillonnage d'un élément à transmission continue. La fonction de transfert d'un élément digital définie par une équation aux différences finies n'est pas affecté par un changement de la fréquence $\frac{1}{T}$.

4.4. Lieu des racines de $1 + K\ G\,(Z)$.

Cette méthode, développée aux U. S. A. sous le nom de « Root-Locus » permet d'étudier le comportement transitoire d'un système dont on connaît la fonction de transfert en boucle ouverte $K\ G\,(Z)$. Les régimes transitoires produits par une fonction d'entrée, sont directement liés aux pôles de $\frac{K\ G(Z)}{1 + K\ G(Z)}$, soit aux racines de $1 + K\ G\,(Z)$. La construction du lieu de ces racines pour différentes valeurs de K permet d'étudier la stabilité absolue et relative du système et de choisir le gain afin d'obtenir un régime transitoire optimal. Si les diagrammes étudiés au paragraphe 5.1 permettaient une étude en fréquence du comportement en régime continu sans une indication du régime transitoire, le lieu des racines sert uniquement à étudier ce dernier régime indépendamment du premier. Les deux méthodes ne se concurrencent pas, mais se complètent et sont choisies pour l'analyse des systèmes de contrôle suivant le but recherché. Des méthodes ont été proposées par l'intermédiaire de transformations curvilinéaires pour relater le tracé d'une méthode à l'autre et permettre ainsi une étude de compensation plus

complète. On se limitera ici à l'étude de la stabilité absolue par la méthode du lieu des racines de $1 + K\,G(Z)$.

La méthode à suivre pour le tracé est en tous points identique à celle utilisée pour les systèmes continus et l'on recommande au lecteur de se reporter aux références [25], [12] pour les différentes étapes du tracé.

Les racines de $1 + K\,G(Z)$ seront exprimées en fonction de Z complexe et le lieu de racines se trace dans le plan complexe Z. Dans ce plan, la région de stabilité est l'intérieur du cercle de rayon unité. La partie du lieu qui est située à l'intérieur définit toutes les valeurs du gain pour lesquelles le système est stable. Autrement il est instable et la limite est donnée par le gain correspondant à l'intersection du cercle unité et du lieu. Le lieu permet d'évaluer très facilement les variations apportées à la stabilité par une variation du gain. En même temps les modifications aux régimes transitoires sont déterminées.

Si des parties du lieu coupent le cercle en plusieurs points pour des valeurs de K différentes, les régions stables seront délimitées sur chaque partie en faisant varier K de 0 à l'infini. Le lieu est toujours symétrique par rapport à l'axe réel puisque composé de points conjugués. Les points d'intersection avec le cercle se trouvant de part et d'autre de l'axe réel correspondent aux mêmes valeurs de K (voir *fig.* 45). Lorsque K varie de 0 à l'infini on peut

Fig. 45. — Exemple de lieu des racines de $1 + K\,G(Z)$ pour

$$G(Z) = \frac{0{,}37\,(Z + 0{,}7)}{(Z - 1)\,(Z - 0{,}37)}.$$

rencontrer plusieurs fois le cercle, ce qui définit des zones de stabilité pouvant être atteintes suivant le gain disponible à la mise en fonctionnement. L'emplacement des points d'intersection avec le cercle donne le genre d'instabilité dans laquelle le système se met à évoluer. Au point $Z = +1 + j0$, le système devient instable à la moindre impulsion perturbatrice, générant une suite d'impulsions d'égales amplitude et direction. Au point $Z = -1 + j0$ l'instabilité correspond à une suite d'impulsions égales, mais de sens opposé. On le vérifie en développant $\frac{Z}{Z+1}$ par division continue. Pour les autres points sur le cercle, les impulsions sont de direction alternée et leur amplitude varie avec une fréquence dépendant de la position du point sur le cercle.

L'étude de la stabilité absolue que nous avons présentée jusqu'à maintenant ne portait que sur les échantillons et la fonction de transfert pulsée $\frac{K\,G(Z)}{1 + K\,G(Z)}$ puisque c'est sous cette forme que tout système à transmission pulsée peut se réduire sous une forme simple et caractéristique.

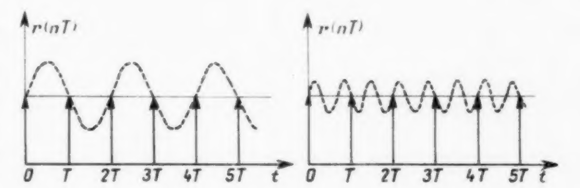


Fig. 46. — Exemple d'oscillations masquées superposées à

$$E(Z) = \frac{Z}{Z-1}.$$

Bien que la réponse d'un tel système soit en général continue en plaçant à la sortie un élément à transmission continue, la réponse entre échantillons est complètement négligée dans l'étude de la stabilité basée sur la fonction de transfert pulsée. Comme indiqué à la figure 46, une oscillation stable ou instable peut être présente à une fréquence au moins moitié de celle d'échantillonnage sans que l'expression en Z permette d'en tenir compte. Ces oscillations représentent une fonction périodique dont l'amplitude est nulle à tous les instants d'échantillonnage. Toute autre variation périodique conduisant à une instabilité, soit relative, soit absolue, qui présenterait des valeurs non nulles à certains échantillons apparaîtrait dans la fonction de transfert pulsée et pourrait être détectée. Il suffit donc de reconnaître dans la transformation de $\frac{1}{1 + G(p)}$ à $\frac{1}{1 + G^*(p)}$ la présence d'oscillations parasites de fréquence moitié égale ou multiple de celle d'échantillonnage.

Ces oscillations ne peuvent provenir que de $K\,G(p)$, car elles apparaissent entre échantillons, tout ce qui

est variation entre échantillons étant contenu dans $\frac{K\,G(Z)}{1+K\,G(Z)}$ [7].

Une façon d'obtenir cette information dans l'intervalle est d'effectuer un échantillonnage durant cette période par une modulation impulsionnelle de fréquence double, triple ou de multiple plus élevé.

Si nous nous reportons aux diagrammes et fonctions de transfert globales de la figure 37, on note que toute relation liant la sortie à l'entrée est composée du produit d'une fonction de transfert pulsée et d'une fonction de transfert continue comme indiqué ci-après. L'échantillonnage à fréquence double, par exemple, n'apportera aucune information nouvelle sur le premier facteur; Z est remplacé par Z'^2, ce qui est une nouvelle transformation conforme dédoublant les racines de $B(Z)+K\,A(Z)=0$ ainsi que de $B(Z)=0$. En effet, toute racine initiale de la forme $Z-a=0$ devient

$$Z'^2-a=(Z'-\sqrt{a})(Z'+\sqrt{a}).$$

Pour ce qui est du facteur $G(p)$, sa transformée Z doit présenter le même nombre de pôles pour les fréquences d'échantillonnage initiale et celle doublée à la condition que dans le premier cas la bande centrale $|j\omega|<j\frac{\Omega}{2}$ englobait tous les pôles de $G(p)$. Si les pôles situés en dehors ne sont pas disposés sur une ligne d'ordonnée $p=jn\frac{\Omega}{2}$ n nombre entier différent de 0, ils apparaîtront dans

$$G(Z)=\mathfrak{Z}[G(p)]$$

comme s'ils étaient enclos dans la bande centrale. Sur les lignes d'équation $p=jn\frac{\Omega}{2}$ ces pôles peuvent ne pas paraître dans la fonction $G(Z)$ comme on peut le vérifier à l'aide du tableau mis en Annexe pour les fonctions et $T=1\,s$

$$G(p)=\frac{\pi}{(p+\alpha)^2+n\pi^2}$$

n, nombre entier.

La transformée $G(Z)=\mathfrak{Z}[G(p)]$ est nulle. Ceci correspond à des oscillations de période double simple ou sous-multiple de T d'amplitude nulle aux instants d'échantillonnage, comme indiqué sur la figure 46.

Si la fréquence d'échantillonnage est doublée, cela revient à porter la bande centrale à $p=\pm j\Omega$ englobant des paires de pôles éventuellement placées le long de $\pm j\frac{\Omega}{2}$. Ces pôles apparaîtront donc dans $G(Z)$ à fréquence double ou supérieure.

Ainsi

$$\mathfrak{Z}'\left[\frac{\pi}{(p+\alpha)^2+n\pi^2}\right]=\frac{Z'\,e^{-\alpha T'}}{Z'^2+e^{-2\alpha T'}},$$

avec

$$T'=\frac{2\pi}{2\Omega}=\frac{T}{2},$$
$$Z'^2=Z.$$

Par contre, une fonction $G(p)$ de la forme

$$G(p)=\frac{p}{(p+\alpha)^2+n\pi^2}$$

correspondant à $g(t)=e^{-\alpha t}\cos n\frac{\Omega t}{2}$ et ayant un zéro sur l'axe réel n'est pas masqué par l'échantillonnage à la période T. Un remplacement de Z par Z'^2 dans $\mathfrak{Z}[G(p)]=G(Z)$ fournit $G(Z')$ à la fréquence double.

Donc, la modulation à fréquence plus élevée a pour effet d'augmenter le nombre des pôles de

$$\mathfrak{Z}[G(p)]$$

quand la modulation initiale masquait des oscillations entre échantillons. Revenant à la formule liant la sortie à l'entrée,

$$\frac{S^*(Z)}{C^*(Z)}=\frac{1}{1+K\,G(Z)}\mathfrak{Z}[G(p)]=\frac{B(Z)}{B(Z)+K\,A(Z)}\frac{A(Z)}{B(Z)}$$

pulsées à la pulsation T et la transposant dans le domaine Z' (pour $Z'^2=Z$) on obtient

$$\frac{S^*(Z)}{C^*(Z)}=\frac{B(Z')}{B(Z')+K\,A(Z')}\frac{A_1(Z')}{B_1(Z')}.$$

La fonction $B(Z')$ a ses pôles dédoublés par rapport à $B(Z)$, la moitié étant située dans la première partie gauche du plan Z' et de pôles supplémentaires dus aux oscillations. Ceux-ci sont donc facilement détectés, car ils ne se simplifient avec aucun autre facteur dans l'expression $\frac{B(Z')}{B_1(Z)}$. C'est donc un moyen de découvrir la présence d'oscillations cachées.

Exemple d'application :

$$G(p)=\frac{p^2+(\pi+2\alpha)p+\pi(\pi+\gamma)+\alpha^2}{(p+\gamma)[(p+\alpha^2)+\pi^2]},$$

$$G(p)=\frac{\pi^2}{(p+\alpha)^2+\pi^2}+\frac{1}{p+\gamma}.$$

A la pulsation $\Omega=2\pi$ d'échantillonnage, on obtient

$$G(Z)=\mathfrak{Z}[G(p)]=0+\frac{Z}{Z-e^{-\gamma T}},\qquad \text{avec}\quad T=1\,s$$

$$\frac{S^*}{E^*}=\frac{Z\,G(Z)}{1+K\,G(Z)},\qquad \text{avec}\quad K=1;$$

$$\frac{S^*}{E^*}=\frac{Z}{2Z-e^{-\gamma T}}.$$

A la pulsation 2Ω, on a

$$G(Z') = Z'[G(p)] = \frac{Z' e^{-\alpha T}}{Z'^2 + e^{-2\alpha T'}} + \frac{Z'}{Z' - e^{-\gamma T'}}$$

$$= \frac{Z'^2[Z' + e^{-\alpha T'}] + Z'[e^{-2\alpha T'} - e^{-\gamma T'} e^{-\alpha T'}]}{[Z'^2 + e^{-2\alpha T'}][Z' + e^{-\gamma T}]}.$$

$$\frac{S^*}{E^*} \frac{K G(Z)}{1 + K G(Z)} \quad \text{avec} \quad K = 1$$

et avec $T' = \frac{T}{2}$ on obtient

$$\frac{S^*(Z')}{E^*(Z')}$$

$$= \mathfrak{Z}' \left[\frac{Z - e^{-\gamma T}}{2Z - e^{-\gamma T}}\right] G(Z')$$

$$= \frac{Z' + e^{-2\gamma T'}}{2Z'^2 - e^{-2\gamma T'}} \cdot$$

$$\times \frac{Z'^2(Z' + e^{-\alpha T'}) + Z'(e^{-2\alpha T'}) - e^{-\gamma T'} e^{-\alpha T'})}{(Z'^2 + e^{-2\alpha T'})(Z' - e^{-\gamma T'})}.$$

La fonction $\frac{S^*(Z)}{E^*(Z)}$ présente donc des pôles supplémentaires en plus de ceux de

$$B(Z) + K A(Z) = 0$$

qui sont responsables des oscillations. Si les oscillations cachées correspondent à un multiple élevé de $F = \frac{1}{T}$ il faut pousser la fréquence de la nouvelle modulation assez haut de façon à inclure les pôles correspondants dans la bande centrale suffisamment élargie.

Sans avoir à retracer le diagramme de Nyquist à une période double d'échantillonnage, nous pouvons ainsi vérifier si la fréquence d'échantillonnage choisie permet d'inclure dans la bande centrale $|j\omega| \leq j\,\frac{\Omega}{2}$ du plan complexe p, tous les pôles de $G(p)$ de l'élément à transmission continue placé près de la sortie du système. On est sûr ainsi d'avoir sous forme pulsée une information suffisante pour déterminer la stabilité absolue sans toutefois être certain d'avoir assez d'informations pour reconstituer exactement le comportement continu du système.

Les méthodes d'analyse de la stabilité des systèmes bouclés pulsés étant examinés, appliquons la théorie de la transformation en Z à quelques exemples.

5. EXEMPLES.

On a rassemblé dans ce paragraphe différents exemples d'analyse de la réponse de systèmes de transmission à l'aide de la transformation en Z avec ou sans retard fictif.

5.1. Réponse d'un système pulsé en boucle fermée.

Cet exemple très simple a pour but de démontrer la facilité d'analyse que procure l'utilisation de la transformation en Z.

Considérons le système pulsé en boucle fermée de la figure 47 dont la sortie est continue. Le signal d'entrée peut être, soit continu, soit discontinu car l'échantillonneur de période T se trouve placé immédiatement à l'entrée.

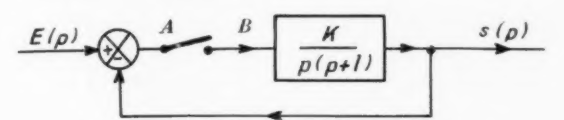


Fig. 47. — Système pulsé en boucle fermée.

A l'aide de la transformation de Laplace on peut littéralement exprimer les relations entre les signaux de sortie $S(p)$, d'entrée $E(p)$ et les signaux $s_A(p)$, $s_B(p)$ aux points A et B,

$$(30) \qquad S_B(p) = S_A^*(p),$$

$$(31) \qquad S(p) = \frac{K}{p(p+1)} S_B(p),$$

$$(32) \qquad S_A(p) = E(p) - S(p) = E(p) - \frac{K}{p(p+1)} S_B(p)$$

$$= E(p) - \frac{K}{p(p+1)} S_A^*(p).$$

Si l'on échantillonne l'expression (32) on obtient

$$S_A^*(p) = E^*(p) - \left(\frac{K}{p(p+1)}\right)^* S_A^*(p),$$

d'où

$$S_A^*(p) = \frac{E^*(p)}{1 + \left[\frac{K}{p(p+1)}\right]^*},$$

d'où la relation entre la sortie et l'entrée :

$$S(p) = \frac{\frac{K}{p(p+1)} E^*(p)}{1 + \left[\frac{K}{p(p+1)}\right]^*}.$$

On sait que les expression $E^*(p)$ et $\left[\frac{K}{p(p+1)}\right]^*$ renferment des termes exponentiels e^{-pT} qu'il est plus aisé de manipuler, soit par la transformation en Z, soit par la transformation en Z avec retard.

Avec les valeurs suivantes :

$$T = 0{,}1 \text{ s},$$
$$K = 2,$$

on va successivement utiliser les deux transformations.

5.1.1. Transformation en Z. — On perdra dans ce cas toute trace de la réponse entre échantillons, ce qui n'est pas important si l'on s'intéresse à l'allure générale de la réponse $s(t)$ sur un grand nombre d'échantillons.

On a dans ce cas

$$\left[\frac{2}{p(p+1)}\right]^{*} = \mathfrak{Z}\left[\frac{2}{p(p+1)}\right] = 2\,\mathfrak{Z}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right].$$

Avec l'aide de la table en Annexe on obtient

$$2\,\mathfrak{Z}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right] = \frac{2}{1-Z^{-1}} - \frac{2}{1-0{,}90484\,Z^{-1}}$$
$$= \frac{2\,Z^{-1}.0{,}9516}{(1-0{,}90484\,Z^{-1})(1-Z^{-1})}.$$

Finalement

$$S(Z) = \frac{\mathfrak{Z}\left[\frac{2}{p(p+1)}\right]E(Z)}{1+\mathfrak{Z}\left[\frac{2}{p(p+1)}\right]},$$

$$S(Z) = \frac{2\,Z^{-1}\,0{,}09516\,E(Z)}{(1-0{,}90484\,Z^{-1})(1-Z^{-1})+0{,}19032\,Z^{-1}}$$
$$= \frac{Z^{-1}\,0{,}19032\,E(Z)}{1-1{,}71452\,Z^{-1}+0{,}90484\,Z^{-2}}.$$

La fonction de transfert pulsée du système s'exprime donc par

$$W(Z) = \frac{S(Z)}{E(Z)} = \frac{Z^{-1}.0{,}19032}{1-1{,}71452\,Z^{-1}+0{,}90484\,Z^{-2}}.$$

Si l'on choisit comme signal d'entrée un échelon unitaire, le signal de sortie devient

$$S(Z) = \frac{0{,}19032\,Z^{-1}}{(1-Z^{-1})(1-1{,}71452\,Z^{-1}+0{,}90484\,Z^{-2})}.$$

On peut décomposer cette expression en fractions simples dont les transformées inverses sont contenues dans la table de l'Annexe. Cela n'est pas nécessaire si l'on désire la réponse basée sur les 10 ou 20 premiers échantillons. La méthode de longue division est alors plus rapide et conduit à la suite des puissances de

$$S(Z) = 0 + 0{,}19038\,Z^{-1} + 0{,}51686\,Z^{-2} + 0{,}9043\,Z^{-3}$$
$$+ 1{,}27216\,Z^{-4} + 1{,}555\,Z^{-5} + 1{,}70446\,Z^{-6} + \ldots.$$

La réponse $S(Z)$ est reproduite sur la figure 48. L'une des courbes indique un calcul par division continue avec quatre décimales, l'autre courbe un calcul avec deux décimales. On voit que les résultats peuvent différer notablement au bout de quelques échantillons. Les lignes en pointillé et en trait mixte qui relient les échantillons servent seulement à suivre aisément la suite des échantillons.

La valeur de la réponse pulsée quand $t = nT$ tend vers l'infini est donnée par

$$\underset{n\to\infty}{S(nT)} = \lim_{Z\to\infty} |(1-Z^{-1})\,S(Z)|$$
$$= \left|\frac{0{,}19032\,Z^{-1}}{1-1{,}71452\,Z^{-1}+0{,}90484\,Z^{-2}}\right|_{Z=1} = 1.$$

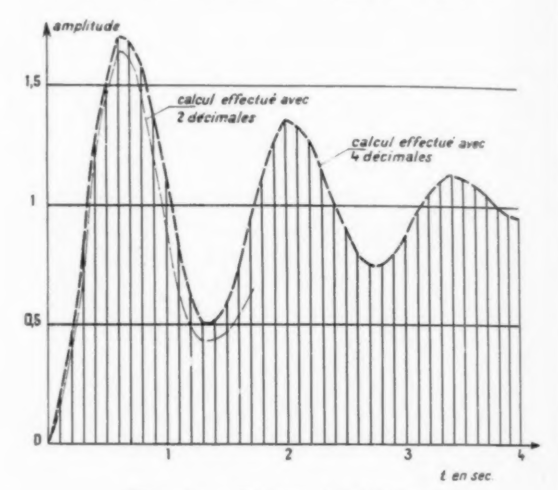


Fig. 48. — Réponse échantillonnée.

Pour obtenir plus de renseignements sur le signal de sortie, la valeur entre échantillon au temps infini, les emplacements et valeurs des minima et maxima, il faut utiliser la transformation en Z avec retard pour l'analyse.

5.1.2. Transformation en Z avec retard. — La réponse du système s'exprime alors par

$$S(Z, m) = \frac{\mathfrak{Z}_m\left[\frac{2}{p(p+1)}\right]E(Z)}{1+\mathfrak{Z}\left|\frac{2}{p(p+1)}\right|}$$
$$= \frac{\mathfrak{Z}_m\left[\frac{2}{p(p+1)}\right]E(Z)}{1+\frac{0{,}19032\,Z^{-1}}{(1-Z^{-1})(1-0{,}90484\,Z^{-1})}}.$$

La transformée en Z avec retard de $\frac{2}{p(p+1)}$ est obtenue à partir de la table en Annexe,

$$\mathfrak{Z}_m\left(\frac{2}{p(p+1)}\right) = 2\,\mathfrak{Z}_m\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right]$$
$$= 2\,Z^{-1}\left[\frac{1}{1-Z^{-1}} - \frac{e^{-0{,}1m}}{1-0{,}90484\,Z^{-1}}\right]$$
$$= 2\,Z^{-1}\left[\frac{1-e^{-0{,}1m}+Z^{-1}(e^{-0{,}1m}-0{,}90484)}{(1-Z^{-1})(1-0{,}90484\,Z^{-1})}\right],$$

avec $0 < m < 1$.

D'où l'on écrit

$$S(Z,m) = \frac{\left\{ \begin{array}{l} E(Z)\, 2\, Z^{-1} [(1 - e^{-0,1m}) \\ \qquad + Z^{-1}(e^{-0,1m} - 0,90484)] \end{array} \right\}}{1 - 1,71452\, Z^{-1} + 0,90484\, Z^{-2}}.$$

Si $E(Z) = \frac{1}{(1 - Z^{-1})}$ la réponse devient

$$\begin{aligned} S(Z,m) &= \frac{2\, Z^{-1} [1 - 0,90484\, Z^{-1} - e^{-0,1m}(1 - Z^{-1})]}{1 - 2,71452\, Z^{-1} + 2,61936\, Z^{-2} - 0,90484\, Z^{-3}} \\ &= 0 - (3,61942 - 3,42904\, e^{-0,1m})\, Z^{-2} \\ &\quad + (4,58626 - 4,0694\, e^{-0,1m})\, Z^{-3} \\ &\quad + (5,67862 - 3,97432\, e^{-0,1m})\, Z^{-4} \\ &\quad + (4,2336 - 2,96044\, e^{-0,1m})\, Z^{-5} \\ &\quad + (3,1251 - 1,5701\, e^{-0,1m})\, Z^{-6} \\ &\quad + (1,7177 - 0,01324\, e^{-0,1m})\, Z^{-7} \\ &\quad + (0,30768) + 1,39798\, e^{-0,1m})\, Z^{-8} \\ &\quad + (0,83636 + 2,40884\, e^{-0,1m})\, Z^{-9} \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En faisant varier m de 1 à 0 on balaye la réponse entre tous les échantillons (voir *fig.* 49).

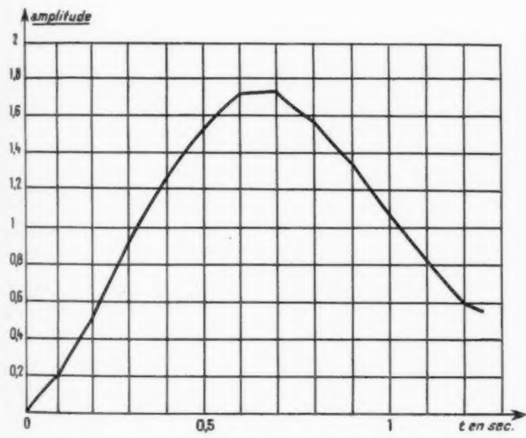


Fig. 49. — Réponse continue du système pulsé.

Une dérivation par rapport à m de la série ci-dessus doit indiquer pour quelles valeurs de m et entre quels échantillons la réponse est maximale ou minimale. Pour cela il existe deux méthodes :

1° Dériver par rapport à la variable indépendante m, la série en Z^{-n} qu'on vient d'obtenir. On s'aperçoit alors que l'expression ainsi obtenue contient m seulement dans le facteur commun $e^{-0,1m}$

$$\begin{aligned} \frac{dS(Z,m)}{dm} &= e^{-0,1m}\, 0,1\, (Z^{-1} - 3,42904\, Z^{-2} \\ &\quad - 4,0694\, Z^{-3} - 3,97432\, Z^{-4} - \ldots). \end{aligned}$$

On en déduit que les minima et maxima ne se produisent pas entre échantillons, mais pour $m = 0$ ou 1, c'est-à-dire aux temps d'échantillonnage. Il faut que le coefficient de Z^{-n} soit égal à 0, soit pour $t = 0$, $t = 7\,T$. Si à $t = 7\,T$ le coefficient n'est pas nul, ceci et dû à l'erreur cumulatrice de la division continue qui a pourtant été effectuée avec cinq décimales.

2° Dériver par rapport à m l'expression non développée de $S(Z, m)$, ce qui donne

$$\frac{dS(Z,m)}{dm} = \frac{-0,2\, Z^{-1}\, e^{-0,1m}(1 - Z^{-1})}{(1 - Z^{-1})(1 - 1,71452\, Z^{-1} + 0,90484\, Z^{-2})};$$

$e^{-0,1m}$ étant ici en facteur seulement, on est sûr de trouver les maxima et minima aux temps d'échantillonnage. Il faut effectuer la division continue de cette expression pour en déterminer l'emplacement.

On peut encore analyser, à l'aide de $S(Z, m)$, la réponse pour t tendant vers l'infini en calculant

$$\begin{aligned} \underset{t \to \infty}{S(t)} &= \lim_{Z \to 1} [(1 - Z^{-1})\, S(Z,m)] \\ &= \frac{2\,[1 - 0,90484\, Z^{-1} - 0\ \, e^{-0,1m}]}{1 - 1,71452 + 0,90474} = \frac{0,19032}{0,19032} = 1. \end{aligned}$$

La réponse se stabilise donc à la valeur unitaire après un temps suffisamment long. On est sûr qu'il n'y a pas d'oscillations entretenues ou « pompage » par l'absence de termes dépendant de m dans l'expression de la réponse à l'infini.

5.2. Réponse en régime permanent d'un système à un signal quelconque périodique.

5.2.1. On vient de voir l'intérêt de la transformation en Z avec retard pour calculer la réponse en régime transitoire et aussi en régime permanent d'un système pulsé. Le signal d'entrée pouvait être indifféremment continu ou pulsé.

On peut utiliser cette méthode d'analyse pour calculer la réponse en régime permanent ou transitoire d'un système purement continu à un signal d'entrée périodique.

Ce signal d'entrée se reproduit toutes les T secondes et peut avoir une forme quelconque à chaque période qu'on exprimera par $F(p)$. La transformée de Laplace du signal d'entrée est donc

$$\begin{aligned} E(p) &= F(p) + F(p)e^{-pT} + F(p)\,e^{-2pT} + \ldots + F(p)\,e^{-npT} \\ &= \frac{F(p)}{1 - e^{-pT}} = \frac{F(p)}{1 - Z^{-1}} \qquad \text{si} \quad Z = e^{pT}. \end{aligned}$$

Si l'on envoie ce signal dans un circuit dont la fonction de transfert $G(p)$, la réponse s'exprime par

$$S(p) = G(p)\,E(p) = \frac{F(p)\,G(p)}{1 - Z^{-1}}.$$

La réponse est alors calculée aisément par la transformation en Z avec retard comme précédemment.

Néanmoins on traitera ci-après un exemple de réponse, en régime permanent dans le cas où le signal d'entrée à chaque période se compose de plusieurs éléments décalés dans le temps. La fonction $F(p)$ comporte alors des termes exponentiels $e^{-\delta K T p}$, δK représentant les différents décalages des éléments. Comme indiqué au paragraphe 3.4.3.3, il faudra remplacer m dans les formules des transformées par m' tel que

$$m' = m + \delta K - 1 \quad \text{si} \quad 0 < m' < \delta K$$

ou

$$m' = m + \delta K \quad \text{si} \quad \delta K < m' < 1.$$

Cela oblige à partager l'intervalle de m' entre 0 et 1 en différentes parties délimitées par les valeurs δK et à calculer dans chacune la transformée $S(Z, m')$.

Si l'on désire la réponse en régime permanent, on calcule

$$\lim_{Z \to 1} [(1 - Z^{-1}) S(Z, m')] = \lim_{Z \to 1} \mathfrak{Z}_m [G(p) F(p) e^{-\delta K T p}].$$

5.2.2. Comme exemple, on considère le signal d'entrée de la figure 50 composé de portions de sinusoïdes, qu'on envoie dans un circuit RL dont la fonction de transfert s'exprime par $\dfrac{K}{P + b}$.

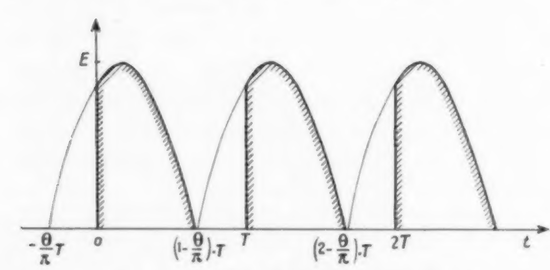


Fig. 50. — Signal périodique d'excitation.

La transformée de Laplace du signal d'entrée $F(t)$ s'écrit

$$F(p) = \mathcal{L}[F(t)]$$

$$= E\,\mathcal{L}\left[\sin(at + \theta) + \sin at\, e^{-\left(\frac{\pi - \theta}{\pi}\right)pT}\right] \frac{1}{1 - e^{-Tp}}$$

$$= \frac{E}{1 - e^{-Tp}} \left[\frac{a}{p^2 + a^2} \cos\theta + \frac{p \sin\theta}{p^2 + a^2} + \frac{a e^{-\left(\frac{\pi - \theta}{\pi}\right)Tp}}{p^2 + a^2}\right]$$

$$= \frac{E}{1 - e^{-Tp}} \left[\frac{a\cos\theta + p\sin\theta + a e^{-\left(\frac{\pi - \theta}{\pi}\right)Tp}}{p^2 + a^2}\right].$$

La réponse globale du système devient

$$S(p) = \frac{EK}{(p + b)(1 - e^{-Tp})(p^2 + a^2)} \times \left[a\cos\theta + p\sin\theta + a e^{-\left(\frac{\pi - \theta}{\pi}\right)Tp}\right].$$

On obtient la transformée en Z avec retard en décomposant $S(p)$ en fractions simples et en recherchant leurs transformées dans la table en Annexe.

On trouve en se fixant $\theta = 120°$.

Pour $0 < m' < \frac{2}{3}$,

$$S(Z, m') = \frac{-e^{-bm'T}}{Z - e^{-bT}} \left(B - a e^{-\frac{2}{3}bT} Z^{-1}\right) \frac{kE}{a^2 + b^2}$$
$$+ \frac{kE}{(a^2 + b^2)(Z^2 + 2Z + 1)}$$
$$\times \Big\{ B[Z\cos m'\pi - \cos(1 - m')\pi]$$
$$- aZ^{-1}\left[Z\cos\left(m' + \frac{2}{3}\right)\pi - \cos\left(\frac{1}{3} - m'\right)\pi\right]$$
$$+ \frac{(a^2 + b^2)\sin\theta - bB}{a} \times [Z\sin m'\pi + \sin(1 - m')\pi]$$
$$+ bZ^{-1}\left[Z\sin\left(m' + \frac{2}{3}\right)\pi + \sin\left(\frac{1}{3} - m'\right)\pi\right]\Big\};$$

Pour $\frac{2}{3} < m' < 1$,

$$S(Z, m) = -\frac{e^{-bm'T}}{Z - e^{-bT}} \left(B - a e^{\frac{1}{3}bT}\right) \frac{kE}{a^2 + b^2}$$
$$+ \frac{kE}{(a^2 + b^2)(Z^2 + 2Z + 1)}$$
$$\times \Big\{ B[Z\cos m'\pi - \cos(1 - m')\pi]$$
$$- a\left[Z\cos\left(m' - \frac{1}{3}\right)\pi - \cos\left(\frac{4}{3} - m'\right)\pi\right]$$
$$+ \frac{(a^2 + b^2)\sin\theta - bB}{a} \times [Z\sin m'\pi + \sin(1 - m')\pi]$$
$$+ b\left[Z\sin\left(m' - \frac{1}{3}\right)\pi + \sin\left(\frac{4}{3} - m'\right)\pi\right]\Big\},$$

avec

$$B = b\sin\theta - a\cos\theta.$$

La figure 51 reproduit la réponse d'un circuit LR au signal de la figure 50 après avoir adopté les valeurs numériques suivantes :

$$b = 62,83 = \frac{2\pi}{0,1}, \qquad a = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{\frac{L}{R}} = \frac{\pi}{\frac{1}{50}} = 157$$

et en faisant varier m' de 0 à 1.

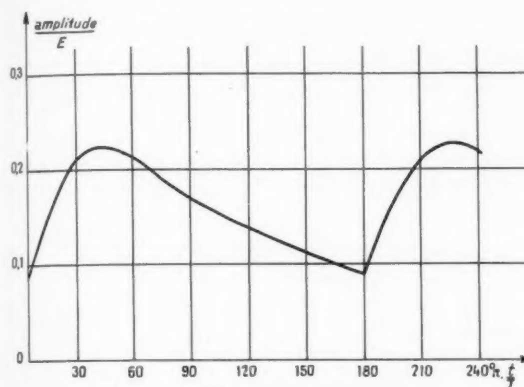


Fig. 51. — Réponse d'un circuit RL à un signal d'excitation périodique.

5.3. Évaluation approchée d'une réponse continue par une méthode numérique inspirée de la transformation en Z.

Dans les exemples précédents, on a pu apprécier la facilité de calcul d'une réponse dans le temps à partir d'une transformée en Z. Cette transformée a été obtenue en se référant à la table en Annexe en supposant que la fonction continue a pu être au préalable décomposée en éléments simples. Ceci est l'inconvénient rencontré pour calculer la réponse d'un système dont on ne connaît que la transformée en p. On peut alors rechercher une méthode approchée de calcul qui, tout en gardant la simplicité de développement des transformées en Z, évite la décomposition en fractions simples de $F(p)$. Cette méthode a été exposée par S. Thaler et R. Boxer et a été reprise par J. Tou.

Elle consiste à développer

$$p = \frac{1}{T} \operatorname{Log} Z \quad (\text{car } Z = e^{Tp})$$

en série de $\frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$, car on a

$$\operatorname{Log} Z = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right),$$

avec

$$x = \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \qquad \text{et} \qquad x^2 < 1.$$

On cherche à exprimer non pas p, qui ne converge pas rapidement, mais $\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \ldots$

$$\frac{1}{p} = \frac{T}{\operatorname{Log} Z} = \frac{T}{2}\left[\frac{1}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots}\right]$$
$$= \frac{T}{2x} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + \ldots\right)},$$

expression qu'on peut développer, car $x^2 < 1$

$$\frac{1}{p} = \frac{T}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{4x^3}{45} - \frac{44x^5}{945} - \ldots\right].$$

Cette série converge rapidement et en première approximation on peut ne garder que le premier terme, ce qui donne

$$\frac{1}{p} \simeq \frac{T}{2} \frac{1 + Z^{-1}}{1 - Z^{-1}}$$

$\frac{1}{p^2}$ est égal à :

$$\frac{1}{p^2} = \frac{\left(\frac{T}{2}\right)^2}{x^2\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{5}\right)^2}$$
$$= \frac{T^2}{4}\left[\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{4x^3}{45} - \frac{44x^5}{945} - \ldots\right]^2$$
$$= \frac{T^2}{4}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\left(\frac{x}{3} + \frac{4x}{45} + \frac{44}{945} + \ldots\right) + \ldots\right]$$
$$= \frac{T^2}{4}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3} - \frac{8x^2}{45}\right]$$

en première approximation,

$$\frac{1}{p^2} \simeq \frac{T^2}{4}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3}\right) \simeq \frac{T^2}{12} \frac{1 + 10Z^{-1} + Z^{-2}}{(1 - Z^{-1})^2}.$$

De la même façon, on obtient des expressions approchées en Z^{-1} pour $\frac{1}{p^3}$, $\frac{1}{p^4}$ et $\frac{1}{p^5}$. Ces expressions sont données ci-dessous :

$\frac{1}{p^k}$.	Expression approchée en Z^{-1}.
$\frac{1}{p}$	$\frac{T}{2} \frac{1 + Z^{-1}}{1 - Z^{-1}}$
$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T^2}{12} \frac{1 + 10Z^{-1} + Z^{-2}}{(1 - Z^{-1})^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^3}{2} \frac{Z^{-1} - Z^{-2}}{(1 - Z^{-1})^3}$
$\frac{1}{p^4}$	$\frac{T^4}{6} \frac{Z^{-1} + 4Z^{-2} + Z^{-3}}{(1 - Z^{-1})^4} - \frac{T^4}{720}$
$\frac{1}{p^5}$	$\frac{T^5}{25} \frac{Z^{-1} + 11Z^{-2} + 11Z^{-3} + Z^{-4}}{(1 - Z^{-1})^5}$

Ces expressions ne sont que des approximations de $\frac{1}{p^k}$ dans lesquelles Z^{-1} remplace e^{-pT}. Mais il n'a pas été fait usage pour leur calcul d'un échantillonnage fictif et elles ne représentent ni une fonction de transfert pulsée ni une réponse pulsée. Si l'on désire connaître la réponse temporelle correspondant à $F(p)$ il faut partir de la formule de transformation inverse de Laplace

$$F(t) = \frac{1}{2\pi j} \times \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\, e^{tp}\, dp$$

qu'on peut calculer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F(t) = {} & \frac{1}{2\pi j}\int_{-\frac{\pi}{T}j+c}^{\frac{\pi}{T}j+c} F(p)\, e^{tp}\, dp \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_{c-j\infty}^{-\frac{\pi}{T}j+c} F(p)\, e^{tp}\, dp \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{T}j+c}^{c+j\infty} F(p)\, e^{tp}\, dp. \end{aligned}$$

En supposant que tous les pôles de $F(p)$ sont dans la bande $\pm\frac{\pi}{T}j$ et assez loin de la bordure, on peut admettre que les derniers termes du deuxième membre sont négligeables devant le premier terme. On est donc ramené au calcul de la transformée inverse dans une bande étroite du plan complexe qui s'apparente à celui d'une transformée inverse en Z. On a, en effet, en remplaçant t par nT, e^{pT} par Z et $F(p)$ par les expressions approchées en Z^{-1}

$$\begin{aligned} F(nT) &= \frac{1}{2\pi j}\int_{-\frac{\pi}{T}j+c}^{+\frac{\pi}{T}j+c} F(p)\, e^{nTp}\, dp \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{-\frac{\pi}{T}j+c}^{+\frac{\pi}{T}j+c} \frac{1}{T} F\left(\frac{\operatorname{Log} Z}{T}\right) Z^{n-1}\, dZ. \end{aligned}$$

Cette formule lorsque $F\left(\frac{\operatorname{Log} Z}{T}\right)$ est exprimée en fonction de Z^{-1} est identique à la formule de transformation inverse en Z au terme $\frac{1}{T}$ près. Le développement par division continue de $F\left(\frac{\operatorname{Log} Z}{T}\right)$ conduit à la réponse $F(nT)$ sans difficulté.

On prendra comme exemple le même système que celui utilisé au paragraphe 5.1, mais sans échantillonnage (*fig.* 52). La réponse à un échelon unitaire d'excitation s'exprime par

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p}\,\frac{2\,G(p)}{1+2\,G(p)} \\ &= \frac{1}{p}\,\frac{2}{p^2+p+2}. \end{aligned}$$

Fig. 52. — Système continu en boucle fermée.

On manipule cette expression pour n'y faire apparaître que des termes en p de puissance négative

$$F(p) = \frac{2\,p^{-3}}{2\,p^{-2}+p^{-1}+1}.$$

Après remplacement de p^{-3}, p^{-2} et p^{-1} par leurs formules approchées en Z^{-1} et division par le coefficient $\frac{1}{T}$, on trouve

$$\begin{aligned} F(Z) &= \frac{6\,T^2(Z^{-1}+Z^{-2})}{\left\{\begin{aligned} (1-Z^{-1})\,[(6+3\,T+T^2)+Z^{-1}(10\,T^2-12) \\ +Z^{-2}(6-3\,T+T^2)] \end{aligned}\right\}} \\ &= \frac{6\,T^2(Z^{-1}+Z^{-2})}{\left\{\begin{aligned} (6+3\,T+T^2)-Z^{-1}(18+3\,T-9\,T^2) \\ +Z^{-2}(18-3\,T-9\,T^2)-Z^{-3}(6-3\,T+T^2) \end{aligned}\right\}}. \end{aligned}$$

Si l'on choisit $T = 0{,}2$ s, cette expression devient

$$\begin{aligned} F_{0,2}(Z) &= \frac{0{,}0364458\,(1-Z^{-1})\,Z^{-1}}{1-2{,}7469879\,Z^{-1}+2{,}56626506\,Z^{-2}-0{,}8192771\,Z^{-3}} \\ &= 0+0{,}036144\,Z^{-1}+0{,}13543\,Z^{-2} \\ &\quad +0{,}27927\,Z^{-3}+0{,}44922\,Z^{-4} \\ &\quad +0{,}628271\,Z^{-5}+0{,}801832\,Z^{-6} \\ &\quad +0{,}958351\,Z^{-7}+\ldots. \end{aligned}$$

Pour $T = 0{,}1$ s,

$$\begin{aligned} F_{0,1}(Z) &= \frac{0{,}009508716\,Z^{-1}(1+Z^{-1})}{\left\{\begin{aligned} 1-2{,}8858954\,Z^{-1}+2{,}79080824\,Z^{-2} \\ -0{,}904912836\,Z^{-3} \end{aligned}\right\}} \\ &= 0+0{,}009608\,Z^{-1}+0{,}036949\,Z^{-2} \\ &\quad +0{,}08009\,Z^{-3}+0{,}13663\,Z^{-4} \\ &\quad +0{,}20421\,Z^{-5}+0{,}28049\,Z^{-6} \\ &\quad +0{,}36320\,Z^{-7}+0{,}45015\,Z^{-8} \\ &\quad +0{,}53929\,Z^{-9}+0{,}62871\,Z^{-10} \\ &\quad +0{,}71668\,Z^{-11}+0{,}801676\,Z^{-12}+\ldots. \end{aligned}$$

Ces réponses sont à comparer avec la réponse exacte du système continu qui peut être calculée dans ce cas, car la décomposition en fractions simples est immédiate.

Le calcul étant effectué tous les 0,1 s, on trouve la suite des nombres suivants :

$$0;\quad 0{,}009662;\quad 0{,}037218;\quad 0{,}080446;$$
$$0{,}149153;\quad 0{,}204633;\quad 0{,}28091;\quad 0{,}36359;$$
$$0{,}450498;\quad 0{,}539575;\quad 0{,}628923;\quad \ldots$$

L'approximation est donc très bonne, de l'ordre du 1/1000e pour l'approximation au pas de 0,1 s, du 1/100e pour celle au pas de 0,2 s. La figure 53 indique l'allure de la réponse exacte et des réponses approchées.

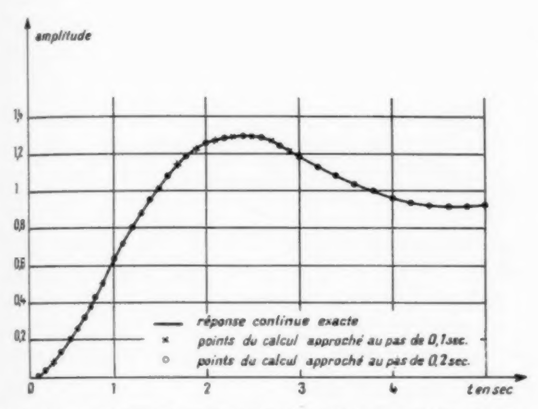


Fig. 53. — Réponses approchées du système continu étudié.

5.4. Analyse de la stabilité d'un système comportant un retard.

Introduits par un opérateur humain fermant une boucle d'asservissement et dus à la nature même d'un processus physique ou d'une réaction chimique qu'on désire contrôler, les délais et retards apportés à l'acheminement d'une information existent pratiquement dans un grand nombre de systèmes de contrôle.

Dans le cas des systèmes continus, leur introduction complique beaucoup l'analyse des performances. Les méthodes d'étude fréquentielle sont plus difficiles à appliquer, le trace du lieu des racines devient très vite impraticable. Bien souvent le retard dont la fonction de transfert possède la forme exponentielle $e^{-\tau p}$, où τ est le délai et p la variable de Laplace est alors approximé par le rapport de deux polynomes en p dont la longue division coïncide suivant la précision désirée avec le développement en série de $e^{-\tau p}$.

Dans le cas des systèmes à information pulsée, l'introduction d'un retard ne complique pas l'analyse. Elle nécessite simplement comme nous allons le montrer, l'utilisation de la transformation en Z avec retard, développée dans la première partie de cet article. Considérons pour cela un asservissement à informations pulsées de structure classique dont la fonction de transfert directe comporte un retard. Le diagramme de ce système est donné par la figure 54. Les fonctions de transfert : $G_e(p)$, $G_p(p)$, $e^{-\tau p}$ représentent respectivement :

$G_e(p)$, la fonction de transfert de l'extrapolateur effectuant la reconstitution du signal d'erreur échantillonné;

$G_p(p)$, la fonction de transfert du processus à contrôler;

$e^{-\tau p}$, le retard inhérent au phénomène physique et faisant partie intégrante du système.

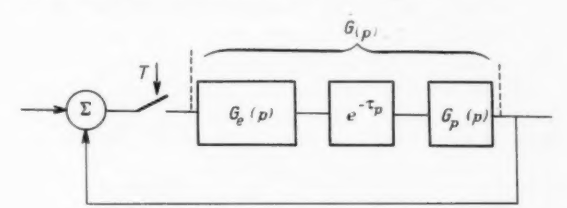


Fig. 54. — Diagramme d'un asservissement à information pulsée comportant un retard pur.

La fonction de transfert de la chaîne directe $G(p)$ possède donc la forme

$$G(p) = G_e(p)\,G_p(p)\,e^{-\tau p}$$

ou, si l'on se place dans le cas particulier d'une reconstitution par un extrapolateur d'ordre 0, dont l'implantation facile est pratique courante,

$$G(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}\,G_p(p)\,e^{-\tau p}.$$

La transformation en Z de $G(p)$ s'écrit donc

$$\mathfrak{Z}[G(p)] = \mathfrak{Z}\left[\frac{1 - e^{-Tp}}{p}\,G_p(p)\,e^{-\tau p}\right],$$

soit, en vertu du théorème régissant les fonctions de transfert en cascade,

$$\mathfrak{Z}[G(p)] = (1 - Z^{-1})\,\mathfrak{Z}\left[\frac{G_p(p)}{p}\,e^{-\tau p}\right]$$

posons

$$G_0(p) = \frac{G_p(p)}{p}$$

et, ce qui est toujours possible,

$$\frac{\tau}{T} = k + 1 - m.$$

où k est entier et m une fraction,

$$\mathfrak{Z}[G(p)] = (1 - Z^{-1}) Z^{-k} \mathfrak{Z}[G_0(p) e^{mTp}].$$

soit, en faisant usage de la transformation en Z avec retard,

$$G(Z) = (1 - Z^{-1}) Z^{-k} G_0(Z, m).$$

La fonction de transfert globale $K(Z)$ s'écrit donc

$$K(Z) = \frac{(1 - Z^{-1}) Z^{-k} G_0(Z, m)}{1 + (1 - Z^{-1}) Z^{-k} G_0(Z, m)},$$

soit

$$K(Z) = \frac{(Z - 1) G_0(Z, m)}{Z^{k+1}[Z + (Z - 1) G_0(Z, m)]};$$

$G_0(Z, m)$, transformation en Z avec retard s'obtient, soit directement par le calcul, soit par extrait de la table en Annexe. L'étude de la réponse d'un asservissement à information pulsée comportant un retard s'effectue alors par inversion du produit $S(Z)$ donné dans le cas d'une structure telle que celle de la figure 1 par

$$S(Z) = K(Z) E(Z)$$

où $E(Z)$ est la transformée en Z du signal continu d'entrée $e(t)$.

La stabilité s'étudie par l'analyse de l'équation caractéristique

$$1 + G(Z) = 0,$$

soit par l'étude de

$$1 + (1 - Z^{-1}) Z^{-k} G_0(Z, m).$$

Afin d'illustrer la manière d'utiliser la transformation en Z avec retard à l'étude des asservissements linéaires à information pulsée comportant des retards, détaillons numériquement un exemple dans lequel intervient le retard d'un opérateur humain dans un système de guidage [36]. Supposons qu'on veuille guider à l'aide d'informations fournies par un radar de veille un avion en envoyant par l'intermédiaire d'une maquette des ordres optiques au pilote. Les ordres optiques de pilotage sont élaborés à partir d'un système d'équations décrivant la cinématique de la loi de guidage retenue. Le système bouclé formé par le radar, la loi cinématique, le pilote, l'avion peut alors se représenter schématiquement par le diagramme de la figure 55. Si, dans une pré-étude de la stabilité du système autour d'un point, on étudie uniquement le mouvement latéral de l'avion, l'asservissement se réduit alors au diagramme donné par la figure 56 dans lequel la fonction de transfert linéarisée d'un pilote est détaillée.

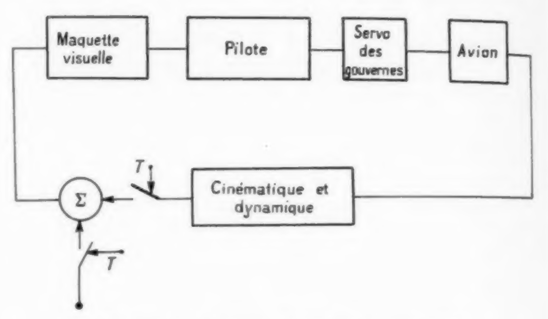


Fig. 55. — Exemple d'un asservissement à information pulsée comportant un opérateur humain.

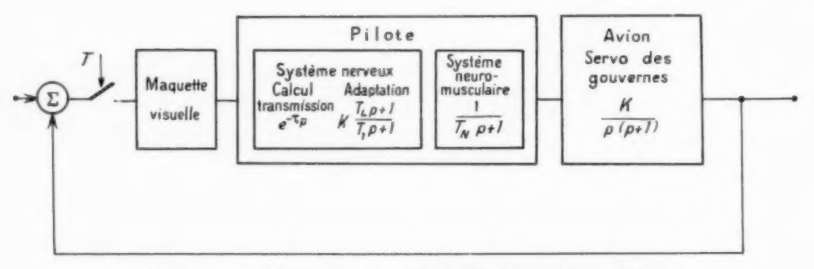


Fig. 56. — Diagramme représentatif du système linéarisé autour d'un point pour l'étude de la stabilité du mouvement latéral.

Celle-ci s'écrit

$$P(p) = \frac{e^{-\tau p}}{T_N p + 1} K \left(\frac{T_L p + 1}{T_1 p + 1} \right),$$

où $\frac{e^{-\tau p}}{T_N p + 1}$ est une fonction de transfert aux caractéristiques fixes;

$K \left(\frac{T_L p + 1}{T_1 p + 1} \right)$ une fonction de transfert adaptive donnant au système ses performances optimales.

Négligeons la constante de temps et la deuxième fonction de transfert, ce qui correspond physiquement à utiliser un pilote « linéarisé » nerveux, mais ne possédant aucune qualité d'anticipation et d'optimisation du gain de boucle. Le système à étudier, si en première approximation on identifie la maquette visuelle à un extrapolateur d'ordre o, se réduit finalement au diagramme de la figure 57. La fonction de transfert en Z de la chaîne directe de ce système bouclé s'écrit alors

$$G(Z, m) = K\mathfrak{Z}\left[\frac{1-e^{-Tp}}{p}\,\frac{e^{-\tau p}}{p(p+1)}\right].$$

Fig. 57. — Diagramme du système étudié.

Si nous conservons τ, T et K comme paramètres,

$$G(Z, m) = K(1-Z^{-1})\mathfrak{Z}\left[\frac{e^{-Tp}\,e^{mTp}}{p^2(p+1)}\right],$$
$$\text{avec}\quad \tau = T - mT,$$

soit m défini par

$$m = 1 - \frac{\tau}{T}$$

et si nous utilisons la table de transformation en Z avec retard donnée en référence

$$G(Z) = K(1-Z^{-1})\left[\frac{T}{(Z-1)^2} + \frac{mT-1}{Z-1} + \frac{e^{-mT}}{Z-e^{-T}}\right]$$

qui s'écrit également

$$\begin{aligned}G(Z) = {} & \frac{K}{Z(Z-1)(Z-e^{-T})}\\ & \times\{Z^2(mT-1+e^{-mT})\\ & + Z(T-(mT-1)(1+e^{-T})-2e^{-mT})\\ & + [e^{-T}(mT-1)+e^{-mT}-e^{-mT}T]\}.\end{aligned}$$

L'équation caractéristique du système $1 + G(Z) = 0$ possède donc la forme

$$A_0(Z^3 + A_1Z^2 + A_2Z + A_3)\frac{1}{Z(Z-1)(Z-e^{-T})} = 0$$

et pour calculer les valeurs limites des paramètres assurant la stabilité du système, il suffit d'étudier les zéros du polynome

$$F(Z) = A_0Z^3 + A_1Z^2 + A_2Z + A_3.$$

Appliquons le critère de Routh, au polynome obtenu par la transformation bilinéaire

$$Z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$$

de l'équation ci-dessus. En fonction de A_0, A_1, A_2, A_3, les conditions de stabilité absolue s'écrivent, comme le vérifiera le lecteur,

$$\begin{aligned}B_0 &= A_1 + A_2 + A_3 + A_0 > 0,\\ B_1 &= 3(A_0 - A_1) + A_1 - A_2 > 0,\\ B_2 &= 3(A_0 + A_1) - A_1 - A_2 > 0,\\ B_3 &= A_0 - A_1 + A_2 - A_3 > 0,\\ B_4 &= A_0^2 - A_3^2 - A_0A_2 + A_1A_3 > 0.\end{aligned}$$

En fonction des paramètres T, τ, K les coefficients A_0, ..., A_3 valent

$$\begin{aligned}A_0 &= 1,\\ A_1 &= [T-\tau-1+e^{-T}e^{\tau}]K-(1+e^{-T}),\\ A_2 &= [e^{-T}+K(T-(T-\tau-1)(1+e^{-T})-2e^{-T}e^{\tau}],\\ A_3 &= [e^{-T}(T-\tau-1)+e^{-T}e^{\tau}-Te^{-T}].\end{aligned}$$

Les quantités B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 sont respectivement égales à

$$\begin{aligned}B_0 = {} & KT[1-e^{-T}],\\ B_1 = {} & 2-2e^{-T}+K[2(T-\tau-1)\\ & -2e^{-T}(T-\tau-1)+3Te^{-T}-T],\\ B_2 = {} & 4+K[4e^{-T}e^{\tau}+4e^{-T}(T-\tau-1)-3Te^{-T}-T],\\ B_3 = {} & 2+2e^{-T}+K[-2(T-\tau-1)-4e^{-T}e^{\tau}\\ & -2(T-\tau-1)e^{-T}+T(1+e^{-T}],\\ B_4 = {} & 1-K^2[e^{-T}(T-\tau-1)+e^{-T}e^{\tau}-Te^{-T}]^2-e^{-T}\\ & -K[T-(T-\tau-1)-e^{-T}(T-\tau-1)-2e^{-T}e^{\tau}]\\ & +K\{[(T-\tau-1)+e^{-T}e^{\tau}]K-(1+e^{-T})\}\\ & \times[e^{-T}(T-\tau-1)+e^{-T}e^{\tau}-Te^{-T}].\end{aligned}$$

Étudions la stabilité absolue du système pour une période d'échantillonnage donnée $T = 5$ s, ce qui correspond physiquement à un radar de veille rapide. Choisissons le retard comme variable. Pour une valeur de τ, τ_1, l'ensemble d'inégalités

$$B_0 > 0, \qquad B_1 > 0, \qquad \ldots, \qquad B_4 > 0$$

se réduit à un ensemble d'inégalités à une variable K gain de la boucle. Il est donc possible de déterminer pour $\tau = \tau_1$, les valeurs de K, si elles existent, satisfaisant le système d'inégalités. Si l'on fait maintenant varier τ_1, on obtient une collection de valeurs marginales du gain. Cet ensemble peut se représenter dans un espace $[K_1, x]$ par une zone dont les contours résultent de la collection d'inégalités. Pour $T = 5$ s et un retard τ compris entre o et 2 s,

cette zone est donnée par la figure 58. Elle permet de souligner sur cet exemple une particularité des systèmes à information pulsée comportant un retard. Dans certaines limites, le retard pur introduit dans importants, de ramener l'étude des systèmes linéaires pulsés comportant un retard aux procédés classiques d'analyse et de synthèse de cette famille d'asservissements.

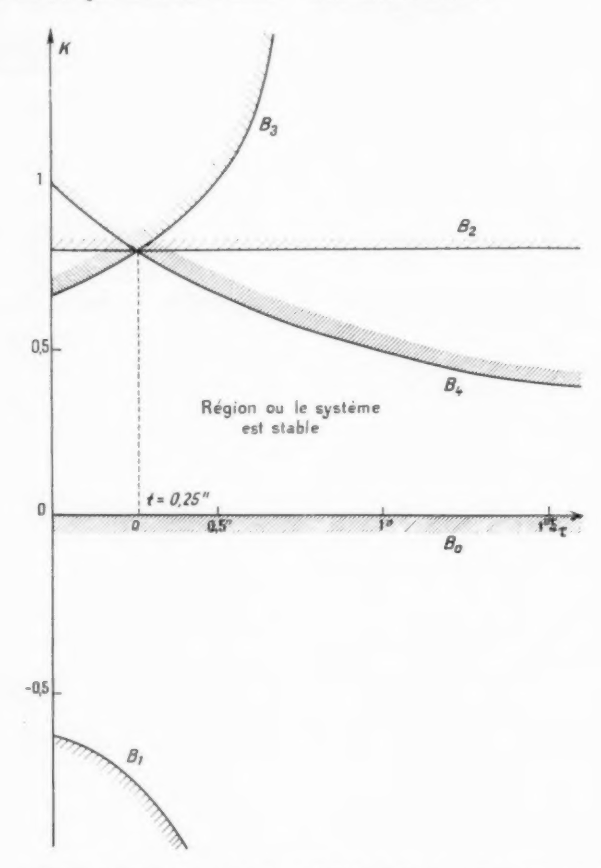


Fig. 58. — Détermination des zones de stabilité absolue par le critère de Routh.

un asservissement à information pulsée présente l'effet compensateur d'un réseau de retard de phase. Pour τ compris entre 0 et 0,25 s, le retard augmente la stabilité. Pour τ compris entre 0,25 et 2 s les valeurs de gain possibles se réduisent ainsi que les performances de l'ensemble. L'introduction d'un retard est donc quelquefois intéressante dans l'amélioration de la stabilité d'un système.

On ne poursuivra pas plus loin l'analyse de la stabilité de cet asservissement par les méthodes classiques du lieu des racines et de l'étude fréquentielle. Toutefois, cet exemple et une application numérique du simple test de Routh, montrent tout l'intérêt de la transformation en Z avec retard qui permet, sans autres difficultés que celles de calculs

5.5. Étude du système dénommé « Posicast » par la transformation en Z.

La dénomination « Posicast » a été donnée voici quelques années à des systèmes de régulation commandés d'une manière apériodique et discontinue.

Cette technique s'applique bien à des systèmes en cascade peu ou pas amortis dont on désire néanmoins obtenir une réponse sans oscillation à l'excitation par un échelon unitaire (*fig.* 59 *a*). Au lieu d'exciter le système à l'aide du signal d'entrée complet, on en injecte une partie pendant un certain laps de temps, puis le reste ensuite (*fig.* 59 *b*). Ce laps de temps dépend de l'amortissement, mais surtout de la fréquence propre du système. Il représente le temps

nécessaire pour emmagasiner de l'énergie dans certains élément du système, énergie que dans le laps de temps suivant sera transférée dans d'autres éléments et ainsi de suite, ce qui produit les oscillations. En introduisant l'énergie d'entrée de l'échelon unitaire en deux ou plusieurs parties on peut contrarier ces transferts d'énergie et si l'on

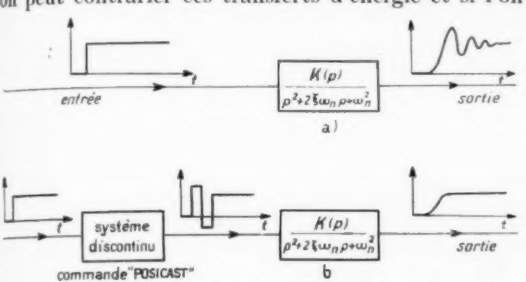


Fig. 59. — Principe de la commande « Posicast ».

réalise leur exacte opposition de phase et d'amplitude, obtenir une réponse dépourvue d'oscillations. La commande par contrôle « Posicast » apparaît comme un égaliseur des caractéristiques du système de transmission utilisé.

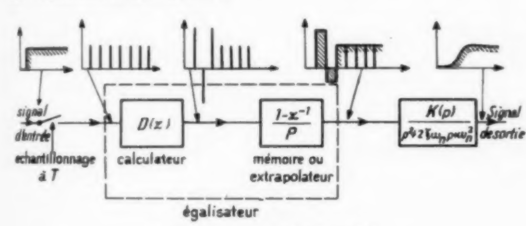


Fig. 60. — Système pulsé équivalent à la commande « Posicast ».

L'amplitude et la répartition dans le temps de l'excitation apériodique ont été calculées par O. J. M. Smith à partir de la notion de vecteurs [51], [52].

Notre but est ici de reprendre l'étude à l'aide de la transformation en Z qui conduit à une analyse plus simple et plus générale.

La configuration du système qui sera analysée par la transformation en Z est celle représentée à la figure 60 dans laquelle on trouve, de la gauche vers la droite :

— le signal d'entrée $E(p)$ qui est un échelon unitaire;

— un échantillonneur de période T fournissant une suite d'impulsions unitaires à partir de l'échelon unitaire continu;

— un égalisateur composé de :

1° un élément calculateur digital qui, à partir des impulsions unitaires, calcule une série limitée d'impulsions d'amplitude différente de l'unité; sa fonction de transfert pulsée est définie par $D(Z)$;

2° un élément mémoire ou extrapolateur d'ordre 0 qui, à partir des impulsions du calculateur de durée extrêmement courte, fournit des paliers de durée T à l'amplitude des impulsions;

— le système dont on veut égaliser le comportement et qu'on définit par sa fonction de transfert $G(p)$. Ce système s'accommode d'être excité par les signaux en palier venant de l'égaliseur.

Cette configuration réalise l'équivalence en fonctionnement pulsé de la commande « Posicast » définie par O. J. M. Smith.

5.5.1. CAS D'UN SYSTÈME NON AMORTI DU DEUXIÈME ORDRE. — Le système à égaliser a pour fonction de transfert

$$G(p) = \frac{a^2}{p^2 + a^2}.$$

Il faut se fixer la période d'échantillonnage T en rapport avec la pulsation propre du système afin d'obtenir ces oppositions de phase dans le transfert des énergies. Plusieurs valeurs de T peuvent être considérées suivant qu'on recherche un établissement plus ou moins rapide du régime permanent.

On prend donc :

$$T = \frac{2\pi}{a}\,\frac{1}{k}, \qquad \text{avec} \quad k = \text{nombre entier}.$$

Appliquons la transformation en Z avec retard à la chaîne des éléments de la figure 60 pour obtenir la fonction $S(Z, m)$ du signal de sortie,

$$(33) \quad S(Z, m) = \mathfrak{Z}_m[E^*(p)]\,\mathfrak{Z}_m\left[\frac{(1-Z^{-1})}{p} D(Z) \frac{a^2}{p^2+a^2}\right] = E(Z)\,D(Z)\,(1-Z^{-1})\,\mathfrak{Z}_m\left[\frac{a^2}{p\,(p^2+a^2)}\right]$$

$$= E(Z)\,D(Z)\,(1-Z^{-1})\,Z^{-1}\left[\frac{1}{1-Z^{-1}} - \frac{\cos m\frac{2\pi}{k} - \cos(1-m)\frac{2\pi}{k}\cdot Z^{-1}}{1-2Z^{-1}\cos\frac{2\pi}{k} + Z^{-2}}\right],$$

$$(34) \quad S(Z, m) = E(Z)\,D(Z)\,Z^{-1}\,\frac{1-\cos\frac{2\pi}{k}m - Z^{-1}\left[2\cos\frac{2\pi}{k} - \cos(1-m)\frac{2\pi}{k} - \cos m\frac{2\pi}{k}\right] + Z^{-2}\left[1-\cos(1-m)\frac{2\pi}{K}\right]}{1-2Z^{-1}\cos\frac{2\pi}{k} + Z^{-2}}.$$

Pour $k = 2$, par exemple, on trouve

$$S(Z, m) = E(Z)\,D(Z)\,Z^{-2} \times \left[\frac{1 + Z^{-1} - (1 - Z^{-1})\cos m\pi}{1 + Z^{-1}}\right].$$

Le problème est de trouver une fonction $D(Z)$ telle que la réponse au signal

$$E(Z) = \frac{1}{1 - Z^{-1}}$$

atteigne la valeur unitaire le plus rapidement possible et s'y maintienne sans oscillation. Ceci implique que dans la réponse exprimée par

$$S(Z, m) = F(0, m)\,Z^{-1} + F(1, m)\,Z^{-2} + F(2, m)\,Z^{-3} + \ldots + F(n, m)\,Z^{-(n+1)},$$

le facteur $F(n, m)$ doit devenir indépendant de m et égal à l'unité pour n le plus bas possible.

Cela sera obtenu si l'on élimine le dénominateur en $1 + Z^{-1}$ de $S(Z, m)$ par un numérateur équivalent de $D(Z)$.

$D(Z)$ devient

$$D(Z) = A\,(1 + Z^{-1}),$$

A étant un gain choisi pour obtenir à l'infini une réponse unitaire; ici $A = \frac{1}{2}$.

La réponse s'écrit alors

$$S(Z, m) = \frac{1}{1 - Z^{-1}}\,\frac{1}{2}(1 + Z^{-1})Z^{-1}\left[1 - \frac{\cos m\pi\,(1 - Z^{-1})}{1 + Z^{-1}}\right],$$

$$S(Z, m) = \frac{(1 + Z^{-1})\,Z^{-1}}{2\,(1 - Z^{-1})} - \frac{\cos m\pi . Z^{-1}}{2},$$

$$S(Z, m) = \frac{Z^{-1}}{2}\,[(1 - \cos m\pi) + 2Z^{-1} + 2Z^{-2} + \ldots + 2Z^{-n}].$$

On voit que le régime transitoire dure seulement durant une période et que la réponse est sans oscillation et égale à l'unité au-delà.

D'une façon plus générale, si l'expression $D(Z)$ est identique au coefficient A près, au dénominateur $\left(1 - 2\,Z^{-1}\cos\frac{2\pi}{k} + Z^{-2}\right)$ on est sûr d'obtenir un régime transitoire ne durant que deux périodes et un régime permanent dépourvu d'oscillation. En effet, en reprenant la formule (1) et en la transformant,

$$S(Z, m) = E(Z)D(Z)Z^{-1}\left[1 - \frac{\left\{\begin{array}{c}(1 - Z^{-1})\cos m\frac{2\pi}{k} - \\ \cos(1 - m)\frac{2\pi}{k}\,Z^{-1}\end{array}\right\}}{1 - 2\,Z^{-1}\cos\frac{2\pi}{k} + Z^{-2}}\right]$$

$$= Z^{-1}D(Z)\left[\frac{1}{1 - Z} - \frac{\left\{\begin{array}{c}\cos m\,\frac{2\pi}{k} - \\ \cos(1 - m)\frac{2\pi}{k}Z^{-1}\end{array}\right\}}{1 - 2Z^{-1}\cos\frac{2\pi}{k} + Z^{-2}}\right].$$

Si

$$E(Z) = \frac{1}{1 - Z^{-1}},$$

et si l'on fait

$$D(Z) = A\left(1 - 2\,Z^{-1}\cos\frac{2\pi}{k} + Z^{-2}\right),$$

on trouve

$$(35)\quad S(Z, m) = Z^{-1}\,\frac{\left(1 - 2\,Z^{-1}\cos\frac{2\pi}{k} + Z^{-2}\right)}{1 - Z^{-1}} - Z^{-1}\left[\cos m\,\frac{\pi}{k} - \cos(1 - m\,\frac{2\pi}{k}\,Z^{-1}\right]A.$$

Le premier terme du deuxième membre de (35) représente le régime permanent, le deuxième étant le régime transitoire. Le coefficient A est calculé pour que la réponse en régime permanent soit unitaire. Il faut donc

$$A = \frac{1}{2 - 2\cos\frac{2\pi}{k}} \quad (^6).$$

On remarque que, dans ces conditions, il n'est pas besoin d'utiliser la transformation en Z avec retard pour déterminer $D(Z)$. La transformation en Z suffit, car elle fournit le même dénominateur en

$$1 - 2\cos\frac{2\pi}{k}\,Z^{-1} + Z^{-2}.$$

Ainsi on détermine $D(Z)$ pour différentes valeurs de k :

$$k = 2 \;:\; D(Z) = \frac{1 + Z^{-1}}{2},$$

$$k = 3 \;:\; D(Z) = 1 - Z^{-1} - Z^{-2},$$

$$k = 4 \;:\; D(Z) = \frac{1 + Z^{-2}}{2},$$

$$k = 8 \;:\; D(Z) = 1,707 - 2,414\,Z^{-1} + 1,707\,Z^{-2},$$

$$k = 16 \;:\; D(Z) = 6,56 - 12,12\,Z^{-1} + 6,56\,Z^{-2}.$$

La figure 61 représente les signaux de sortie de l'élément mémoire et du système égalisé soumis à un échelon unitaire à l'entrée. Nous y voyons que la réponse unitaire est toujours obtenue au bout du temps $2T$ qui varie comme $\frac{1}{k}$. Mais plus k est grand, plus le système égalisateur est obligé de répondre brutalement à son excitation au risque de se saturer.

---

(6) Cette formule semble infirmer la valeur $\frac{1}{2}$ trouvée pour $k = 2$. Cette différence, qui n'existe que pour $k = 2$, provient de simplifications entre le terme du régime permanent et celui du régime transitoire.

5.5.2. Cas d'un système amorti. — On prend

$$G(p) = \frac{a^2+b^2}{(p+a)^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{p^2+2\,ap+b^2+a^2}.$$

Comme précédemment, on peut montrer que la transformée en Z avec retard du signal de sortie se décompose en un terme dépendant de m et un autre indépendant de m, correspondant respectivement aux régimes transitoire et permanent. Le régime transitoire sera limité dans le temps à quelques périodes et le régime permanent sera dépourvu d'oscillation si $D(Z)$ correspond au dénominateur de l'expression $\mathfrak{Z}_m\left[\frac{G(p)}{p}\right]$. Dans ce cas, on ne fera usage que de la transformation en Z.

La transformée $S(Z)$ du signal de sortie s'écrit

$$S(Z) = E(Z)\,D(Z)\,\mathfrak{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right](1-Z^{-1})$$

$$= E(Z)\,D(Z)\,(1-Z^{-1})\left[\frac{1}{1-Z^{-1}} - \frac{1-e^{-aT}Z^{-1}\left(\cos bT + \frac{a}{b}\sin bT\right)}{1-2\,e^{-aT}\cos bT\,Z^{-1}+e^{-2aT}Z^{-2}}\right],$$

$$S(Z) = E(Z)\,D(Z)\,\frac{Z^{-1}\left[1+e^{-aT}\left(\frac{a}{b}\sin\frac{2\pi}{k}-\cos\frac{2\pi}{k}\right)+Z^{-1}\left(e^{-2aT}-e^{-aT}\cos\frac{2\pi}{k}+\frac{a}{b}\sin\frac{2\pi}{k}\right)\right]}{1-2\,e^{-aT}\cos\frac{2\pi}{k}\,Z^{-1}+e^{-2aT}Z^{-2}}$$

en prenant

$$T = \frac{2\pi}{b}\,\frac{1}{k} \qquad (k = \text{nombre entier}).$$

On trouve $D(Z)$ pour différentes valeurs de k, donc de T,

$$k=2:\quad D(Z) = \frac{1+e^{-aT}Z^{-1}}{1+e^{-aT}},$$

$$k=3:\quad D(Z) = \frac{1+Z^{-1}+Z^{-2}}{1-e^{-aT}+e^{-2aT}},$$

$$k=4:\quad D(Z) = \frac{1+e^{-2aT}Z^{-2}}{1+e^{-2aT}},$$

$$k=8:\quad D(Z) = \frac{1-1,414\,e^{-aT}Z^{-1}+e^{-2aT}Z^{-2}}{1+e^{-2aT}+1,414\,e^{-aT}}.$$

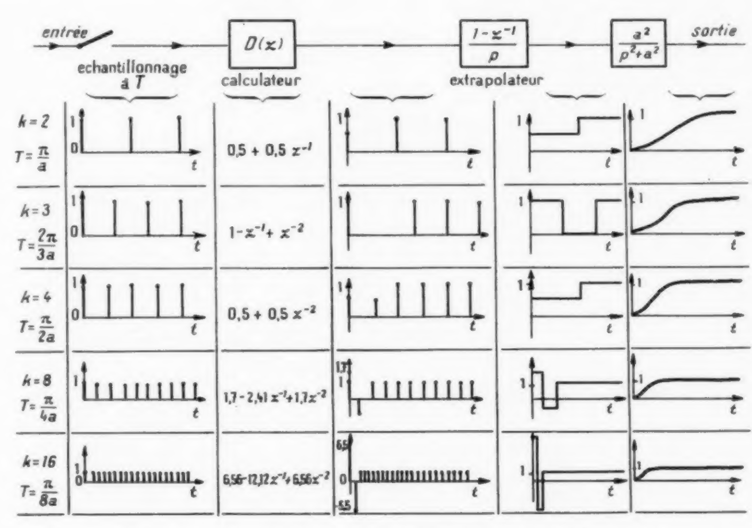


Fig. 61. — Forme des signaux pour différentes valeurs de k.

On voit donc la simplicité avec laquelle on calcule la réponse du système égalisateur grâce à la transformation en Z en fonction de la durée du régime transitoire qu'on recherche. Comme au paragraphe 5.5.1, ce régime ne dure que deux périodes de valeur $T = \frac{ak}{2\pi}$ s.

5.5.3. Cas de systèmes plus compliqués. — Comme l'a suggéré O. J. Smith, des systèmes plus compliqués que les systèmes du deuxième ordre

peuvent être contrôlés par la commande « Posicast ».

Prenons, par exemple, le système défini par

$$G(p) = \frac{a^2 + b^2}{p\left[(p+a)^2 + b^2\right]}.$$

La transformée en Z du signal de sortie devient

$$S(Z) = E(Z)\,D(Z)\,(1 - Z^{-1}) \times \mathfrak{Z}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{2a}{p(a^2+b^2)} + \frac{\dfrac{3a^2 - b^2}{a^2+b^2} + \dfrac{2ap}{a^2+b^2}}{(p+a)^2 + b^2}\right]$$

et, après calcul,

$$S(Z) = \frac{E(Z)\,D(Z)}{b^2} \times \frac{Z^{-1}(A - BZ^{-1} + CZ^{-2})}{(1 - Z^{-1})\left(1 - 2\,e^{-aT}\cos\dfrac{2\pi}{k}Z^{-1} + e^{-2aT}Z^{-2}\right)},$$

avec $T = \frac{2\pi}{b}$.

$$A = b^2 T - 4\,a\,e^{-aT}\cos\frac{2\pi}{k} + e^{-aT}\left[\left(\frac{a^2+b^2}{b}\right)\sin\frac{2\pi}{k} - 2\,a\cos\frac{2\pi}{k}\right],$$

$$B = e^{-2aT}\,2\,a + 2\,e^{-aT}\cos\frac{2\pi}{k}\left(b^2 T + 2\,a\right) + \left[\frac{a^2 - b^2}{b}\sin\frac{2\pi}{k} - 2\,a\cos\frac{2\pi}{k}\right]e^{-aT},$$

$$C = (b^2 T + 2\,a)\,e^{-2aT}.$$

1° L'expression de $D(Z)$ devra être

$$D(Z) = \frac{\left(1 - Z^{-1}\right)\left(1 - 2\,e^{-aT}\cos\dfrac{2\pi}{k}Z^{-1} + e^{-2aT}Z^{-2}\right)}{A - B + C}.$$

Si l'on désire supprimer le pôle à $Z = 1$ qui correspond dans le domaine digital à une intégration, le système global ne sera alors plus capable de suivre un signal d'entrée composé d'une rampe unitaire.

2° Si l'on désire que le système suive une telle excitation, c'est-à-dire qu'il ait un coefficient d'erreur en vitesse non infini, l'égalisateur sera de la forme

$$D(Z) = \frac{1 - 2\,e^{-aT}\cos\dfrac{2\pi}{k}Z^{-1} + e^{-2aT}Z^{-2}}{(A + B + C)\,T}.$$

Dans ces conditions, le système compensé répondra sans erreur et sans oscillation à une rampe unitaire.

On peut apprécier par ces exemples les possibilités d'analyse que la transformation en Z avec ou sans retard procure pour étudier la commande « Posicast ». Bien que travaillant dans un plan complexe, il est possible de garder un contrôle simple et rapide sur la réponse temporelle du système étudié. Une compensation éventuelle d'un système pour en améliorer les performances peut être ainsi calculée à partir de spécifications sur le régime transitoire désiré. Ceci est l'aspect synthétique de la transformation en Z qui dépasse le cadre de cet article.

6. CONCLUSION.

L'exposé ci-dessus intentionnellement limité à l'analyse des systèmes asservis à information pulsée avait pour objectif principal d'exposer une méthode mathématique d'étude appropriée à ce genre de systèmes. Avec cet outil qui est une transformation de Laplace modifiée, les critères d'évaluation des systèmes digitaux sont comparables à ceux utilisés pour les organes à information continue. La synthèse serait elle aussi sensiblement identique.

Des exemples ont permis de montrer la grande versatilité et la simplicité d'utilisation de la transformation en Z. Si les calculs sont souvent longs et réclament une grande précision, ils ne présentent aucune difficulté d'ordre analytique. Par leur caractère itératif, ils peuvent être résolus, plus efficacement par une machine à calculer arithmétique que par une personne.

On peut indiquer que cette méthode d'analyse permet aussi d'étudier la stabilité et la convergence de certains programmes de calculs numériques. En effet, ces derniers présentent le caractère de périodicité qui définit les systèmes à information pulsée. Que celle-ci soit sous forme codée-pulsée ou bien sous forme analogique-pulsée (cette dernière forme a été implicitement choisie au cours de l'exposé) ne change pas l'application de la méthode.

Cet aspect découvre un vaste champ d'utilisation au moment où les calculatrices numériques envahissent le domaine des systèmes asservis, non pas comme moyen auxiliaire de calcul mais comme organe de contrôle dans les boucles de régulation. Ceci est vrai surtout pour les systèmes asservis adaptifs qui nécessitent des calculs complexes, devant être exécutés presque instantanément sur de nombreuses variables et sur lesquels les recherches se développent rapidement aux U. S. A. et en U. R. S. S.

ANNEXE.

Table de transformées en Z avec et sans retard (*).

Nos	$G(p)$.	$g(t)$.	$G(Z)$.	$G(Z, m)$.
0,01...	e^{-kTp}	$\delta(t-kT)$	Z^{-k}	Z^{m-1-k}
0,02...	1	$\delta(t)$	1 ou Z^{-0}	0
1,01...	$\frac{1}{p}$	$u(t)$	$\frac{Z}{Z-1}$	$\frac{1}{Z-1}$
1,02...	$\frac{1}{p^2}$	t	$\frac{TZ}{(Z-1)^2}$	$\frac{mT}{Z-1}+\frac{T}{(Z-1)^2}$
1,03...	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2!}t^2$	$\frac{T^2Z(Z+1)}{2(Z-1)^3}$	$\frac{T^2}{2}\left[\frac{m^2}{Z-1}+\frac{2m+1}{(Z-1)^2}+\frac{2}{(Z-1)^3}\right]$
1,04...	$\frac{1}{p^4}$	$\frac{1}{3!}t^3$	$\frac{T^3(Z^2+4Z+1)}{6(Z-1)^4}$	$\frac{T^3}{6}\left[\frac{m^3}{Z-1}+\frac{3m^2+3m+1}{(Z-1)^2}+\frac{6m+6}{(Z-1)^3}+\frac{6}{(Z-1)^4}\right]$
1,05...	$\frac{1}{p^{k+1}}$	$\frac{1}{k!}t^k$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial a^k}\left(\frac{Z}{Z-e^{-aT}}\right)$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial a^k}\left(\frac{e^{-amT}}{Z-e^{-aT}}\right)$
2,01...	$\frac{1}{p-\frac{1}{T}\ln a}$	$a^{\frac{t}{T}}$	$\frac{Z}{Z-a}$	$\frac{a^m}{Z-a}$
2,02...	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	$\frac{Z}{Z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{Z-e^{-aT}}$
2,03...	$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{TZe^{-aT}}{(Z-e^{-aT})^2}$	$\frac{Te^{-amT}[e^{-aT}+m(Z-e^{-aT})]}{(Z-e^{-aT})^2}$
2,04...	$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{t^2}{2}e^{-at}$	$\frac{T^2e^{-aT}Z}{2(Z-e^{-aT})^2}+\frac{T^2e^{-2aT}Z}{(Z-e^{-aT})^3}$	$\frac{T^2e^{-amT}}{2}\left[\frac{m^2}{Z-e^{-aT}}+\frac{(2m+1)e^{-aT}}{(Z-e^{-aT})^2}+\frac{2e^{-2aT}}{(Z-e^{-aT})^3}\right]$
2,05...	$\frac{1}{(p+a)^{k+1}}$	$\frac{t^k}{k!}e^{-at}$	$\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial a^k}\left(\frac{Z}{Z-e^{-aT}}\right)$	$\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial a^k}\left(\frac{e^{-amT}}{Z-e^{-aT}}\right)$
3,01...	$\frac{a}{p(p+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})Z}{(Z-1)(Z-e^{-aT})}$	$\frac{1}{Z-1}-\frac{e^{-amT}}{Z-e^{-aT}}$

(*) Extraite de l'ouvrage de J. Tou [55].

TABLE DE TRANSFORMÉES EN Z AVEC ET SANS RETARD.

Nos	$G(p)$.	$g(t)$.	$G(Z)$.	$G(Z, m)$.
3,02...	$\frac{a}{p^2(p+a)}$	$t - \frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{TZ}{(Z-1)^2} - \frac{(1-e^{-aT})Z}{a(Z-1)(Z-e^{-aT})}$	$\frac{T}{(Z-1)^2} + \frac{mT - \frac{1}{a}}{Z-1} + \frac{e^{-amT}}{a(Z-e^{-aT})}$
3,03...	$\frac{a}{p^3(p+a)}$	$\frac{1}{2!}\left(t^2 - \frac{2}{a}t + \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a^2}e^{-aT}\right)$	$\frac{T^2Z}{(Z-1)^3} + \frac{(aT-2)TZ}{2a(Z-1)^2} + \frac{Z}{a^2(Z-1)} - \frac{Z}{a^2(Z-e^{-Ta})}$	$\frac{T^2}{(Z-1)^3} + \frac{T^2\left(m+\frac{1}{2}-\frac{T}{a}\right)}{(Z-1)^2} + \frac{\frac{T^2m^2}{2} - \frac{Tm}{a} + \frac{1}{a^2}}{Z-1} - \frac{e^{-amT}}{a^2(Z-e^{-aT})}$
3,04...	$\frac{a}{p^{k+1}(p+a)}$	$\frac{1}{k!}\left[t^k - \frac{k}{a}t^{k-1} + \frac{k(k-1)}{a^2}t^{k-2} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{k!}{a^k}t + (-1)^k\frac{k!}{a^k}\right] + (-1)^{k+1}\frac{e^{-at}}{a^k}$	$\frac{(-1)^{k+1}}{a^k}\frac{1}{1-e^{-aT}Z-1} + \frac{a}{k!}\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{Z}{(x+a)(Z-e^{Tx})}\right]$	$\frac{(-1)^{k+1}}{a^k}\frac{e^{-amT}}{Z-e^{-aT}} + \frac{a}{k!}\lim_{x\to 0}\frac{\partial^k}{\partial Z^k} \times \left[\frac{e^{mTx}}{(x+a)(Z-e^{Tx})}\right]$
4,01...	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$	$\sin\omega_0 t$	$\frac{Z\sin\omega_0 T}{Z^2 - 2Z\cos\omega_0 T + 1}$	$\frac{Z\sin m\omega_0 T + \sin(1-m)\omega_0 T}{Z^2 - 2Z\cos\omega_0 T + 1}$
4,02...	$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$	$\cos\omega_0 t$	$\frac{Z(Z-\cos\omega_0 T)}{Z^2 - 2Z\cos\omega_0 T + 1}$	$\frac{Z\cos m\omega_0 T - \cos(1-m)\omega_0 T}{Z^2 - 2Z\cos\omega_0 T + 1}$
4,03...	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$	$\sinh\omega_0 t$	$\frac{Z\sinh\omega_0 T}{Z^2 - 2Z\cosh\omega_0 T + 1}$	$\frac{Z\sinh m\omega_0 T + \sinh(1-m)\omega_0 T}{Z^2 - 2Z\cosh\omega_0 T + 1}$
4,04...	$\frac{p}{p^2-\omega_0^2}$	$\cosh\omega_0 t$	$\frac{Z(Z-\cosh\omega_0 T)}{Z^2 - 2Z\cosh\omega_0 T + 1}$	$\frac{Z\cosh m\omega_0 T - \cosh(1-m)\omega_0 T}{Z^2 - 2Z\cosh\omega_0 T + 1}$
4,05...	$\frac{\omega_0^2}{p(p^2-\omega_0^2)}$	$\cosh\omega_0 t - 1$	$\frac{Z(Z-\cosh\omega_0 T)}{Z^2 - 2Z\cosh\omega_0 T + 1} - \frac{Z}{Z-1}$	$\frac{Z\cosh m\omega_0 T - \cosh(1-m)\omega_0 T}{Z^2 - 2Z\cosh\omega_0 T + 1} - \frac{1}{Z-1}$
4,06...	$\frac{\omega_0^2}{p(p^2+\omega_0^2)}$	$1 - \cos\omega_0 t$	$\frac{Z}{Z-1} - \frac{Z(Z-\cos\omega_0 T)}{Z^2 - 2Z\cos\omega_0 T + 1}$	$\frac{1}{Z-1} - \frac{Z\cos m\omega_0 T - \cos(1-m)\omega_0 T}{Z^2 - 2Z\cos\omega_0 T + 1}$
4,07...	$\frac{\omega_0^2(p+a)}{p(p^2+\omega_0^2)}$	$a - a\sec\theta\cos(\omega_0 t + \theta)$ avec $\theta = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\omega_0}{a}$	$\frac{aZ}{Z-1} - \frac{aZ^2 - aZ\sec\theta\cos(\omega_0 T + \theta)}{Z^2 - 2Z\cos\omega_0 T + 1}$	$\frac{a}{Z-1} - \frac{\left\{ a\sec\theta \times \left\{ Z\cos(m\omega_0 T + \theta) - \cos[(1-m)\omega_0 T + \theta] \right\} \right\}}{Z^2 - 2Z\cos\omega_0 T + 1}$
5,01...	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{Z}{Z-e^{-aT}} - \frac{Z}{Z-e^{bT}}$	$\frac{e^{-amT}}{Z-e^{-aT}} - \frac{e^{-bmT}}{Z-e^{-bT}}$

TABLE DE TRANSFORMÉES EN Z AVEC ET SANS RETARD.

Nos	$G(p)$.	$g(t)$.	$G(Z)$.	$G(Z, m)$.
5,02...	$\frac{(b-a)(p+c)}{(p+a)(p+b)}$	$(c-a)e^{-at}+(b-c)e^{-bt}$	$\frac{(c-a)Z}{Z-e^{-aT}}+\frac{(b-c)Z}{Z-e^{-bT}}$	$\frac{(c-a)e^{-amT}}{Z-e^{-aT}}+\frac{(b-c)e^{-bmT}}{Z-e^{-bT}}$
5,03...	$\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$	$1+\frac{b}{a-b}e^{-at}-\frac{a}{a-b}e^{-bt}$.	$\frac{Z}{Z-1}+\frac{bZ}{(a-b)(Z-e^{-aT})}-\frac{aZ}{(a-b)(Z-e^{-bT})}$	$\frac{1}{Z-1}+\frac{b\,e^{-amT}}{(a-b)(Z-e^{-aT})}-\frac{a\,e^{-bmT}}{(a-b)(Z-e^{-bT})}$
5,04...	$\frac{ab(p+c)}{p(p+a)(p+b)}$	$c+\frac{b(c-a)}{a-b}e^{-at}+\frac{a(b-c)}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{cZ}{Z-1}+\frac{b(c-a)Z}{(a-b)(Z-e^{-aT})}+\frac{a(b-c)Z}{(a-b)(Z-e^{-bT})}$	$\frac{c}{Z-1}+\frac{b(c-a)e^{-amT}}{(a-b)(Z-e^{-aT})}+\frac{a(b-c)e^{-bmT}}{(a-b)(Z-e^{-bT})}$
5,05...	$\frac{a^2b^2}{p^2(p+a)(p+b)}$	$abt-(a+b)-\frac{b^2}{a-b}e^{-at}+\frac{a^2}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{abTZ}{(Z-1)^2}-\frac{(a+b)Z}{Z-1}-\frac{b^2Z}{(a-b)(Z-e^{-aT})}+\frac{a^2Z}{(a-b)(Z-e^{-bT})}$	$\frac{abT}{(Z-1)^2}+\frac{abmT-(a+b)}{Z-1}-\frac{b^2e^{-amT}}{(a-b)(Z-e^{-aT})}+\frac{a^2e^{-bmT}}{(a-b)(Z-e^{-bT})}$
5,06...	$\frac{a^2b^2(p+c)}{p^2(p+a)(p+b)}$	$abct+[ab-c(a+b)]-\frac{b^2(c-a)}{a-b}e^{-at}-\frac{a^2(b-c)}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{abcTZ}{(Z-1)^2}+\frac{ab-c(a+b)Z}{Z-1}-\frac{b^2(c-a)Z}{(a-b)(Z-e^{-aT})}-\frac{a^2(b-c)Z}{(a-b)(Z-e^{-bT})}$	$\frac{abcT}{(Z-1)^2}+\frac{ab(1+cmT)-c(a+b)}{Z-1}-\frac{b^2(c-a)e^{-amT}}{(a-b)(Z-e^{-aT})}-\frac{a^2(b-c)e^{-bmT}}{(a-b)(Z-e^{-bT})}$
6,01...	$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{Z}{(b-a)(c-a)(Z-e^{-aT})}+\frac{Z}{(a-b)(c-b)(Z-e^{-bT})}+\frac{Z}{(a-c)(b-c)(Z-e^{-cT})}$	$\frac{e^{-amT}}{(b-a)(c-a)(Z-e^{-aT})}+\frac{e^{-bmT}}{(a-b)(c-b)(Z-e^{-bT})}+\frac{e^{-cmT}}{(a-c)(b-c)(Z-e^{-cT})}$
6,02...	$\frac{(p+d)}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{(d-a)}{(b-a)(c-a)}e^{-at}+\frac{(d-b)}{(a-b)(c-b)}e^{-bt}+\frac{(d-c)}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$	$\frac{(d-a)Z}{(b-a)(c-a)(Z-e^{-aT})}+\frac{(d-b)Z}{(a-b)(c-b)(Z-e^{-bT})}+\frac{(d-c)Z}{(a-c)(b-c)(Z-e^{-cT})}$	$\frac{(d-a)e^{-amT}}{(b-a)(c-a)(Z-e^{-aT})}+\frac{(d-b)e^{-bmT}}{(a-b)(c-b)(Z-e^{-bT})}+\frac{(d-c)e^{-cmT}}{(a-c)(b-c)(Z-e^{-cT})}$

TABLE DE TRANSFORMÉES EN Z AVEC ET SANS RETARD

Nos	$G(p)$.	$g(t)$.	$G(Z)$.	$G(Z, m)$.
6,03...	$\frac{abc}{p(p+a)(p+b)(p+c)}$	$1-\frac{bc}{(b-a)(c-a)}e^{-at}-\frac{ca}{(c-b)(a-b)}e^{-bt}-\frac{ab}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$	$\frac{Z}{Z-1}-\frac{bcZ}{(b-a)(c-a)(Z-e^{-aT})}-\frac{caZ}{(c-b)(a-b)(Z-e^{-bT})}-\frac{abZ}{(a-c)(b-c)(Z-e^{-cT})}$	$\frac{1}{Z-1}-\frac{bc\,e^{-amT}}{(b-a)c-a)(Z-e^{-aT})}-\frac{ca\,e^{-bmT}}{(c-b)(a-b)(Z-e^{-bT})}-\frac{ab\,e^{-cmT}}{(a-c)(b-c)(Z-e^{-cT})}$
6,04...	$\frac{abc(p+d)}{p(p+a)(p+b)(p+c)}$	$d-\frac{bc(d-a)}{(b-a)(c-a)}e^{-at}-\frac{ca(d-b)}{(c-b)(a-b)}e^{-bt}-\frac{ab(d-c)}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$	$\frac{dZ}{Z-1}-\frac{bc(d-a)Z}{(b-a)(c-a)(Z-e^{-aT})}-\frac{ca(d-b)Z}{(c-b)(a-b)(Z-e^{-bT})}-\frac{ab(d-c)Z}{(a-c)(b-c)(Z-e^{-cT})}$	$\frac{d}{Z-1},-\frac{bc(d-a)e^{-amT})}{(b-c)(c-a)(Z-e^{-aT})}-\frac{ca(d-b)e^{-bmT}}{(c-b)(a-b)(Z-e^{-bT})}-\frac{ab(d-c)e^{-cmT}}{(a-c)(b-c)(Z-e^{-cT})}$
6,05...	$\frac{(abc)^2}{p^2(p+a)(p+b)(p+c)}$	$abct-(bc+ca+ab)+\frac{b^2c^2}{(b-a)(c-a)}e^{-at}+\frac{c^2a^2}{(c-b)(a-b)}e^{-bt}+\frac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$	$\frac{abcTZ}{(Z-1)^2}-\frac{(bc+ca+ab)Z}{Z-1}+\frac{b^2c^2Z}{(b-a)(c-a)(Z-e^{-aT})}+\frac{c^2a^2Z}{(c-b)(a-b)(Z-e^{-bT})}+\frac{a^2b^2Z}{(a-b)(b-c)(Z-e^{-cT})}$	$\frac{abcT}{(Z-1)^2}+\frac{abcmT-(bc+ca+ab)}{Z-1}+\frac{b^2c^2e^{-amT}}{(b-a)(c-a)(Z-e^{-aT})}+\frac{c^2a^2e^{-bmT}}{(c-b)(a-b)(Z-e^{-bT})}+\frac{a^2b^2e^{-cmT}}{(a-c)(b-c)(Z-e^{-cT})}$
6,06...	$\frac{(abc)^2(p+d)}{p^2(p+a)(p+b)(p+c)}$	$abcdt+[abc-(bc+ca+ab)d]+\frac{b^2c^2(d-a)}{(b-a)(c-a)}e^{-at}+\frac{c^2a^2(d-b)}{(c-b)(a-b)}e^{-bt}+\frac{a^2b^2(d-c)}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$	$\frac{abcdTZ}{(Z-1)^2}+\frac{[abc-(bc+ca+ab)d]Z}{Z-1}+\frac{b^2c^2(d-a)Z}{(b-a)(c-a)(Z-e^{-aT})}+\frac{c^2a^2(d-b)Z}{(c-b)(a-b)(Z-e^{-bT})}+\frac{a^2b^2(d-c)Z}{(a-c)(b-c)(Z-e^{-ct})}$	$\frac{abcT}{(Z-1)^2}+\frac{abc(dmT+1)-(bc+ca+ab)d}{Z-1}+\frac{b^2c^2(d-a)e^{-amT}}{(b-a)(c-a)(Z-e^{-aT})}+\frac{c^2a^2(d-b)e^{-bmT}}{(c-b)(a-b)(Z-e^{-bT})}+\frac{a^2b^2(d-c)e^{-mcT}}{(a-c)(b-c)(Z-e^{-cT})}$
7,01...	$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$	$1-(1+at)e^{-at}$	$\frac{Z}{Z-1}-\frac{Z}{Z-e^{-aT}}-\frac{aTe^{-aT}Z}{(Z-e^{-aT})^2}$	$\frac{1}{Z-1}-\left[\frac{1+amT}{Z-e^{-aT}}+\frac{aTe^{-aT}}{(Z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$
7,02...	$\frac{a^2(p+b)}{p(p+a)^2}$	$b-be^{-at}+a(a-b)te^{-at}$	$\frac{bZ}{Z-1}-\frac{bZ}{Z-e^{-aT}}+\frac{a(a-b)Te^{-aT}Z}{(Z-e^{-aT})^2}$	$\frac{b}{Z-1}+\left[\frac{amT(a-b)-b}{Z-e^{-aT}}+\frac{aT(a-b)e^{-aT}}{(Z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$

TABLE DE TRANSFORMÉES EN Z AVEC ET SANS RETARD.

Nos.	$g(p)$.	$g(t)$.	$G(Z)$.	$G(Z, m.)$
7,03...	$\frac{a^3}{p^2(p+a)^2}$	$at-2+(at+2)e^{-at}$	$\frac{(aT+2)Z-2Z^2}{(Z-1)^2}+\frac{2Z}{Z-e^{-aT}}+\frac{aTe^{-aT}Z}{(Z-e^{-aT})^2}$	$\frac{aT}{(Z-1)^2}+\frac{amT-2}{Z-1}-\left[\frac{amT-2}{Z-e^{-aT}}-\frac{aTe^{-aT}}{(Z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$
7,04...	$\frac{(a-b)^2}{(p+b)(p+a)^2}$	$e^{-bt}-e^{-at}+(a-b)te^{-at}$	$\frac{Z}{Z-e^{-bT}}-\frac{Z}{Z-e^{-aT}}+\frac{(a-b)Te^{-aT}Z}{(Z-e^{-aT})^2}$	$\frac{e^{-mbT}}{Z-e^{-bT}}+\left[\frac{mT(a-b)-1}{Z-e^{-aT}}+\frac{(a-b)Te^{-aT}}{(Z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$
7,05...	$\frac{(a-b)^2(p+c)}{(p+b)(p+a)^2}$	$(c-b)e^{-bt}+(b-c)e^{-at}-(a-b)(c-a)te^{-at}$	$\frac{(c-b)Z}{Z-e^{-bT}}+\frac{(b-c)Z}{Z-e^{-aT}}-\frac{(a-b)(c-a)Te^{-aT}Z}{(Z-e^{-aT})^2}$	$\frac{(c-b)e^{-bmT}}{Z-e^{-bT}}-\left[\frac{mT(a-b)(c-a)-(b-c)}{Z-e^{-aT}}+\frac{(a-b)(c-a)Te^{-aT}}{(Z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$
7,06...	$\frac{a^2b}{p(p+b)(p+a)^2}$	$1-\frac{a^2}{(a-b)^2}e^{-bt}+\frac{ab+b(a-b)}{(a-b)^2}e^{-at}+\frac{ab}{a-b}te^{-at}$	$\frac{Z}{Z-1}-\frac{a^2Z}{(a-b)^2(Z-e^{-bT})}+\frac{[ab+b(a-b)]Z}{(a-b)^2(Z-e^{-aT})}+\frac{abTe^{-aT}Z}{(a-b)(Z-e^{aT})^2}$	$\frac{1}{Z-1}-\frac{a^2e^{-bmT}}{(a-b)^2(Z-e^{-bT})}+\left[\frac{b(a-b)(1+amT)+ab}{(a-b)^2(Z-e^{-aT})}+\frac{abTe^{-aT})}{(a-b)(Z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$
7,07...	$\frac{a^2b(p+c)}{p(p+b)(p+a)^2}$	$c+\frac{a^2(b-c)}{(a-b)^2}e^{-bt}+\frac{ab(c-a)+bc(a-b)}{(a-b)^2}e^{-at}+\frac{ab(c-a)}{a-b}te^{-at}$	$\frac{cZ}{Z-1}+\frac{a^2(b-c)Z}{(a-b)^2(Z-e^{-bT})}+\frac{[ab(c-a)+bc(a-b]Z}{(a-b)^2(Z-e^{-aT})}+\frac{ab(c-a)Te^{-aT}Z}{(a-b)(Z-e^{-aT})^2}$	$\frac{c}{Z-1}+\frac{a^2(b-c)e^{-bmT}}{(a-b)^2(Z-e^{-bT})}+\left\{\frac{ab(c-a)[1+mT(a-b)]+bc(a-b)}{(a-b)^2(Z-e^{-aT})}+\frac{ab(c-a)Te^{-aT}}{(a-b)(Z-e^{-aT})^2}\right\}e^{-amT}$
7,08...	$\frac{(a^2b)^2}{p^2(p+b)(p+a)^2}$	$a^2bt-[ab+a(a+b)]+\frac{a^3}{(a-b)^2}e^{-bt}-\frac{ab^2(3a-2b)}{(a-b)^2}e^{-at}-\frac{a^2b^2}{a-b}te^{-at}$	$\frac{a^2bTZ}{(Z-1)^2}-\frac{[ab+a(a+b)]Z}{Z-1}+\frac{a^3Z}{(a-b)^2(Z-e^{-bT})}-\frac{ab^2(3a-2b)Z}{(a-b)^2(Z-e^{-aT})}-\frac{a^2b^2Te^{-aT}Z}{(a-b)(Z-e^{-aT})^2}$	$\frac{a^2bT}{(Z-1)^2}+\frac{ab(amT-2)-a^2}{Z-1}+\frac{a^3e^{-bmT}}{(a-b)^2(Z-e^{-cT})}-\left[\frac{ab^2(a-b)(amT+2)+a^2b^2}{(a-b)^2(Z-e^{-aT})}+\frac{a^2b^2Te^{-aT}}{(a-b)(Z-e^{-aT})^2}\right]e^{-amT}$
8,01...	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^2}$	$e^{-at}\sin\omega_0 t$	$\frac{Ze^{-aT}\sin\omega_0 T}{Z^2-2Ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$	$\frac{[Z\sin m\omega_0 T+e^{-aT}\sin(1-m)\omega_0 T]e^{-amT}}{Z^2-2Z^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$

TABLE DES TRANSFORMÉES EN Z AVEC ET SANS RETARD.

Nos	$g(p)$.	$g(t)$.	$G(Z)$.	$G(Z, m)$.
8,02...	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega_0^2}$	$e^{-at}\cos\omega_0 t$	$\dfrac{Z^2-Z\,e^{-aT}\cos\omega_0 T}{Z^2-2Z\,e^{-aT}\cos Z_0 T+e^{-2aT}}$	$\dfrac{[Z\cos m\omega_0 T-e^{-aT}\cos(1-m)\omega_0 T]e^{-amT}}{Z^2-2Z\,e^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$
8,03...	$\dfrac{(a-b)^2+\omega_0^2}{(p+b)[(p+a)^2+\omega_0^2]}$	$e^{-bt}-e^{-at}\sec\theta\cos(\omega_0 t+\theta)$ avec $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b-a}{\omega_0}$	$\dfrac{Z}{Z-e^{-bT}}-\dfrac{Z^2-Ze^{-aT}\sec\theta\cos(\omega_0 T+\theta)}{Z^2-2Z\,e^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$	$\dfrac{e^{-bmT}}{Z-e^{-bT}}-\dfrac{\left\{\begin{matrix}\sec\theta\,\{Z\cos(m\omega_0 T+\theta)\\ -e^{-aT}\cos[(1-m)\omega_0 T-\theta]\}e^{-amT}\end{matrix}\right\}}{Z^2-2Z\,e^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$
8,04...	$\dfrac{[(a-b)^2+\omega_0^2](p+\alpha)}{(p+b)[(p+a)^2+\omega_0^2]}$	$(\alpha-b)e^{-bt}-(\alpha-b)e^{-at}\times\sec\theta\cos(\omega_0 t+\theta)$ avec $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{(\alpha-a)(b-a)+\omega_0^2}{(\alpha-b)\,\omega_0}$	$\dfrac{(\alpha-b)Z}{Z-e^{-bT}}-\dfrac{\left\{\begin{matrix}(\alpha-b)[Z^2-Ze^{-aT}\sec\theta\\ \times\cos(\omega_0 T+\theta)]\end{matrix}\right\}}{Z^2-2Z\,e^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$	$\dfrac{(a-b)e^{-bmT}}{Z-e^{-bT}}-\dfrac{\left\{\begin{matrix}(\alpha-b)\sec\theta\\ \times\{Z\cos(m\omega_0 T+\theta)\\ -e^{-aT}\cos[(1-m)\omega_0 T+\theta]\}e^{-amT}\end{matrix}\right\}}{Z^2-2Z\,e^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$
8,05...	$\dfrac{[(a-b)^2+\omega_0^2](p^2+\alpha s+\beta)}{(p+b)[(p+a)^2+\omega_0^2]}$	$(b^2-b\alpha+\beta)e^{-bt}+k^2e^{-at}\sec\theta\cos(\omega_0 t+\theta)$ avec $k^2=a^2+\omega_0^2-2ab+b\alpha-\beta$ $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\left\{\begin{matrix}ak^2-(a^2+\omega_0^2)(\alpha-b)\\ +\beta(2a-b)\end{matrix}\right\}}{\omega_0 k^2}$	$\dfrac{(b^2-b\alpha+\beta)Z}{Z-e^{-bT}}+\dfrac{k^2[Z^2-Ze^{-aT}\sec\theta\cos(\omega_0 T+\theta)]}{Z^2-2Z\,e^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$	$\dfrac{(b^2-b\alpha+\beta)Z}{Z-e^{-bT}}+\dfrac{\left\{\begin{matrix}k^2\sec\theta\,\{Z\cos(m\omega_0 T+\theta)-e^{-aT}\\ \times\cos[(1-m)\omega_0 T+\theta]\}e^{-amT}\end{matrix}\right\}}{Z^2-2Z\,e^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$
9,01...	$\dfrac{a^2+\omega_0^2}{p[(p+a)^2+\omega_0^2]}$	$1-e^{-at}\sec\theta\cos(\omega_0 t+\theta)$ avec $\theta=\operatorname{arc\,tg}-\dfrac{a}{\omega_0}$	$\dfrac{Z}{Z-1}-\dfrac{Z^2-Ze^{-aT}\sec\theta\cos(\omega_0 T+\theta)}{Z^2-2Ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$	$\dfrac{1}{Z-1}-\dfrac{\left\{\begin{matrix}\sec\theta\{Z\cos(m\omega_0 T+\theta)-e^{-aT}\\ \times\cos[(1-m)\omega_0 T+\theta]\}e^{-amT}\end{matrix}\right\}}{Z^2-2Z\,e^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$
9,02...	$\dfrac{(a^2+\omega_0^2)(p+b)}{p[(p+a)^2+\omega_0^2]}$	$b-b\,e^{-at}\sec\theta\cos(\omega_0 t+\theta)$ avec $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{a^2+\omega_0^2-ab}{b\,\omega_0}$	$\dfrac{bZ}{Z-1}-\dfrac{b[Z^2-Ze^{-aT}\sec\theta\cos(\omega_0 T+\theta)]}{Z^2-2Ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$	$\dfrac{b}{Z-1}-\dfrac{\left\{\begin{matrix}b\sec\theta\\ \times\{Z\cos(m\omega_0 T+\theta)\\ -e^{-aT}\cos[(1-m)\omega_0 T+\theta]\}e^{-amT}\end{matrix}\right\}}{Z^2-2Z\,e^{-a}{}_T\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$
9,03...	$\dfrac{(a^2+\omega_0^2)^2}{p^2[(p+a)^2+\omega_0^2]}$	$(a^2+\omega_0^2)t-2a+2a\,e^{-at}\sec\theta\cos(\omega_0 t+\theta)$ avec $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\omega_0^2-a^2}{2a\,\omega_0}$	$\dfrac{[(a^2+\omega_0^2)T+2a]Z-2aZ^2}{(Z-1)^2}+\dfrac{2a[Z^2-Ze^{-aT}\sec\theta\cos(\omega_0 T+\theta)]}{Z^2-2Ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$	$\dfrac{[mT(a^2+\omega_0^2)-2a]Z+(a^2+\omega_0^2)(1-m)T+2a}{(Z-1)^2}+\dfrac{\left\{\begin{matrix}2a\sec\theta\{Z\cos(m\omega_0 T+\theta)\\ -e^{-aT}\cos[(1-m)\omega_0 T+\theta]\}e^{-amT}\end{matrix}\right\}}{Z^2-2Z\,e^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$
9,04...	$\dfrac{(a^2+\omega_0^2)^2(p+b)}{p^2[(p+a)^2+\omega_0^2]}$	$b(a^2+\omega_0^2)t+k^2-k^2e^{-at}\times\sec\theta\cos(\omega_0 t+\theta)$ avec $k^2=a^2+\omega_0^2-2ab$ $\theta=\operatorname{arc\,tg}\left(-\dfrac{ak^2+b(a^2+\omega_0^2)}{\omega_0 k^2}\right)$	$\dfrac{[bT(a^2+\omega_0^2)-k^2]Z+k^2Z^2}{(Z-1)^2}-\dfrac{k^2[Z^2-Ze^{-aT}\sec\theta\cos(\omega_0 T+\theta)]}{Z^2-2Ze^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$	$\dfrac{[bmT(a^2+\omega_0^2)+k^2]Z+(a^2+\omega_0^2)(1-m)bT-k^2}{(Z-1)^2}-\dfrac{\left\{\begin{matrix}k^2\sec\theta\{Z\cos(m\omega_0 T+\theta)\\ -e^{-aT}\cos[(1-m)\omega_0 T+\theta]\}e^{-amT}\end{matrix}\right\}}{Z^2-2Z\,e^{-aT}\cos\omega_0 T+e^{-2aT}}$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. ANGOT, *Compléments de mathématiques à l'usage des Ingénieurs de l'Électronique et des Télécommunications*, éditions de la Revue d'Optique.

[2] H. FREEMAN, *A simplified procedure for the long division. Inversion of Z transform expressions* (*Inst. Radio. Engrs. Trans. on Circuit Theory*, septembre 1957, p. 287-289).

[3] RAGAZZINI et FRANKLIN, *Sampled data Control Systems*, Mc Graw Hill, 1958.

[4] G. W. JOHNSON et D. P. UNDORFF, *Extension of continuous data system design. Techniques of sampled data control systems* (*Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs.*, Part II, septembre 1955, p. 252-263).

[5] E. I. JURY, *Sampled data control systems* (*Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs.*, Part II, juillet 1956, Rapport 56-20).

[6] E. I. JURY, *Analysis and synthesis of sampled data control systems* (*Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs.*, Part I, vol. 73, 1954).

[7] E. I. JURY, *Hidden oscillations in sampled data control systems*, University of California, Institute of Engineering Research, series 60, Issue 155, 14 décembre 1955.

[8] LAGO, *Additions to Z transformation theory for sampled data systems* (*Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs.*, Part II, vol. 75, janvier 1955, p. 403-408).

[9] D. F. LAWDEN, *A general theory of sampling servo systems* (*Proc. Inst. Electr. Engrs.*, Part IV, vol. 98, octobre 1951).

[10] LINVILL, *Sampled data systems studied through comparison of sampling with amplitude modulation* (*Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs.*, Part II, vol. 71, novembre 1952, p. 225-234).

[11] LINVILL, *Unpublished lecture Notes*, Lectures 6.54 M. I. T. pulsed data systems.

[12] MASAHIRO MORI, *Root-Locus method of pulse transfert function for sampled data control systems* (*Inst. Radio Engrs. Trans. on Automatic Control*, novembre 1957, p. 13-20).

[13] S. J. MASON, *Feedback theory; some properties of signal flow graphs* (*Proc. Inst. Radio Engrs.*, vol. 41, septembre 1953, p. 1144-1156).

[14] S. J. MASON, *Feedback theory; further properties of signal flow graphs* (*Proc. Inst. Radio Engrs.*, vol. 44, juillet 1956, p. 920-926).

[15] C. M. MILNE THOMSON, *The calculus of finite differences*, MacMillan and Co, 1933.

[16] J. M. PELLEGRIN, *Inst. Radio Engrs. Wescon Convention Record*, Part IV, novembre 1958.

[17] L. A. PIPES, *The summation of Fourier series by operational methods* (*J. Appl. Phys.*, vol. 21, avril 1950, p. 298-301).

[18] PORTER et STONESMAN, *A new approach to the design of pulse monitored servo systems* (*Proc. Inst. Electr. Engrs.*, Part II, vol. 97, 1950, p. 597).

[19] J. R. RAGAZZINI et L. A. ZADEH, *The analysis sampled data systems* (*Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs.*, Part II, vol. 71, novembre 1952, p. 225-234).

[20] J. RAGAZZINI, EE 209, Fall 57, Columbia Unpublished Lecture Notes, Columbia University.

[21] F. H. RAYMOND, *Analyse des servomécanismes à grandeur d'entrée discontinue* (*Ann. Télécomm.*, t. 4, 1949, p. 250-256, 307-314 et 347-357).

[22] J. M. SALZER, *Signal flow reductions in sampled data systems* (*Inst. Radio Engrs. Wescon Convention Record*, Part IV, 1951, p. 166-170).

[23] C. SHANNON, *Communication in the presence of noise* (*Proc. Inst. Radio Engrs.*, vol. 37, janvier 1949, p. 10-21).

[24] J. SKLANSKY, *Network compensation of error sampled feedback control systems*, Technical report T-7 B, Columbia University Engineering center, New-York.

[25] J. G. TRUXAL, *Automatic feedback control system synthesis*, Mc Graw Hill Bock Co, New-York, 1955, chap. 9.

[26] TPSIKIN, *Frequency method of analysing intermittent regulating system*, Traduction par le National Bureau of standard, Report de l'article de *Automatika Telemekhanika*, vol. 14, n° 1, 1953, p. 11-13 (en russe).

[27] Y. Z. TSIPKIN, *Théorie de la régulation intermittente* [*Automatika Telemekhanica*, vol. 10, n° 3, 1949, p. 189-224 (en russe)].

[28] Y. Z. TSPIKIN, *Differensengleichungen der impuls und regeltechnik Veb*, Verlag technik, Berlin, 1956 (traduction allemande).

[29] WHITTAKER et ROBINSON, *Calculus of observations*, Blackie and Son Ltd, Glasgow, 1932, chap. XI.

[30] J. T. TORE, *Digital and sampled data control systems*, Mc Graw Hill, 1959.

[31] J. L. YEN, *On nonuniform sampling of band width, limited signals* (*Inst. Radio Engrs.*, vol. 3, n° 4, 1956).

[32] B. WIDROW, *A study of rough amplitude quantisation by means of Nyquist sampling theory* (*Inst. Radio Engrs. Trans. on Circuit Theory*, vol. 3, n° 4, 1956).

[33] W. R. Bennet, *Spectra of quantised signals* (*Bell. Syst. Techn. J.*, vol. 27, 1948).

[34] R. M. Stewart, *Statistical design and evaluation of filters for the restoration of sampled data* (*Proc. Inst. Radio Engrs.*, vol. 14, janvier-avril 1956).

[35] R. S. Berkowitz, *Methods of sampling band limited functions* (*Proc. Inst. Radio Engrs.*, vol. 44, janvier-avril 1956).

[36] D. Mc Ruer, *Dynamic response of human operators* (W. A. D. C., Technical Report 56, p. 524).

[37] H. A. Helm, *Analysis of digital systems* (*Proc. computers in control systems conf.*, octobre 1957).

[38] A. Kohlenberg, *Exact interpolation of band limited functions* (*J. Appl. Phys.*, vol. 24, 1955, p. 1 432-1436).

[39] D. Gabor, *Theory of communication* (*J. Inst. Electr. Engrs.*, Part III, vol. 93, novembre 1956, p. 429-457).

[40] H. Nyquist, *Certain topics in telegraph transmission theory* (*Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs.*, vol. 47, avril 1928, p. 617-644).

[41] A.-L. Cauchy, *Mémoire sur diverses formules d'analyse* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 12, 1841, p. 283-298).

[42] J.-L. Yen, *On the synthesis of line sources and infinite strip sources* [*Inst. Radio Engrs. Trans. on Antennas and Propagation* (sous presse)].

[43] S. Goldman, *Frequency analysis modulation and noise*, Mc Graw Hill Bock Co, New-York, 1948.

[44] A. Lichnerowicz, *Algèbre et Analyse linéaires*, Masson et Cie, Paris, 1947.

[45] B. M. Oliver et J. M. Pierre C. E. Shannon, *The Philosophy of P. C. M.* (*Proc. Inst. Radio Engrs.*, novembre 1948, p. 1324-1331).

[46] G. Oden et J. Glemm, *An extension of the sampling theorem to the case where the frequency spectrum of the time function exists in a finite number of discrete bands*, Columbia University Technical Report T 22 B.

[47] E. Parzen, *A simple proof and some extensions of the sampling theorem*, Columbia University, New-York, 1956.

[48] A. A. Susskind, *Notes on analog digital conversions techniques*, Dept. of E. E., M. I. T.

[49] C. B. Feldman et W. R. Bennet, *Band width and transmission performance* (*Bell. Syst. Techn. J.*, vol. 28, n° 3, juillet 1949, p. 490-595).

[50] H. L. Krauss et P. F. Ording, *Distorsion and band width characteristics of pulse modulation* (*Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs.*, vol. 66, 1947, p. 984-988).

[51] O. J. M. Smith, *Posicast control of damped oscillatory systems* (*Proc. Inst. Radio Engrs.*, septembre 1957, p. 1249-1256).

[52] Gr. H. Tallman et O. J. M. Smith, *Analog study of dead beat Posicast control* (*Inst. Radio Engrs. Trans. on Automatic Control*, mars 1958).

[53] S. Thaler et R. Boxer, *A simplified method of solving linear non linear systems* (*Proc. Inst. Radio Engrs.*, vol. 44, janvier 1956).

[54] S. Thaler et R. Boxer, *An operational calculus for numerical analysis* (*Inst. Radio Engrs. Convention Record*, 1956, Part II).

[55] J. T. Tou, *Digital and sampled data control systems*, Mc-Graw-Hill book Co., 1959.

TRANSPOSITION FRÉQUENCE-TEMPS POUR LA MESURE D'UNE FRÉQUENCE INCONNUE (1).

PAR R. H. BAUMANN,

Département « Applications Radar » du Centre de Recherches Techniques
de la Compagnie générale de télégraphie Sans Fil.

DEUXIÈME PARTIE (2).

SOMMAIRE. — *Dans la première partie de cette étude, l'auteur a montré que des signaux sinusoïdaux circulant dans un système en boucle fermée, qui comporte une ligne à retard et un modulateur, sont transformés en impulsions, dont le décalage est une mesure de la fréquence Doppler recherchée. Dans la deuxième partie, il considère les limitations du système; notamment, il traite théoriquement le cas d'un système imparfait ayant des signaux parasites dans la ligne à retard et dans le modulateur. Cette analyse explique bien les résultats expérimentaux décrits dans la première partie. En conclusion, l'auteur propose plusieurs méthodes pour améliorer la stabilité du système, et pour minimiser l'effet indésirable des signaux parasites. Le nombre maximal de tours obtenu en laboratoire avec un de ces procédés était de 400, soit une amélioration de 20 fois le rapport signal/bruit (en amplitude), et une précision en fréquence Doppler meilleure que 0,5 %.* (C. D. U. : 621.317.36 : 621.396.962.23.)

SUMMARY. — *In Part I of this investigation, it was shown that the circulating sinusoidal signals in a closed-loop system, which consists of a delay line and a modulator, are transformed into impulses whose time shift is a measure of the unknown Doppler frequency to be determined. In Part II, the system limitations are considered; more specifically, an imperfect system with spurious signals in the delay line and in the modulator is treated theoretically. This analysis provides a good explanation of the anamolous experimental results described in Part I. In conclusion, several methods are proposed for improving the system stability and for minimizing the undesirable effect of spurious signals. The maximum number of recirculations obtained experimentally with one of these methods was 400, which corresponds to a twenty-fold improvement in the signal-to-noise amplitude ratio, and to the determination of the Doppler frequency to within 0.5 %.* (U. D. C. : 621.317.36 : 621.396.962.23.)

INHALTSANGABE. — *Im ersten Teile dieser Untersuchung hat der Verfasser gezeigt, dass sinusförmige Signale, die in einer geschlossenen Schleife umlaufen, welche eine Verzögerungsleitung und eine Modulatorstufe enthält, in Impulse verwandelt werden, deren Abstand ein Mass für die gesuchte Dopplerfrequenz gibt. In diesem zweiten Teile untersucht er die Beschränkungen dieses Verfahrens und behandelt theoretisch den Fall einer unvollkommenen Vorrichtung mit Störspannungen in der Verzögerungsleitung wie im Modulator. Diese Untersuchung ermöglicht die Auslegung der Versuchsergebnisse, die im ersten Teil beschrieben worden sind. Zum Schluss schlägt der Verfasser mehrere Verfahren zur Verbesserung der Stabilität der Vorrichtung und zur Unterdrückung der Auswirkungen der unerwünschten Störspannungen vor. Die grösste Anzahl von Umläufen, die man im Labor mit einem solchen Verfahren erhalten konnte, betrug 400, was einer Verbesserung des Störpegelabstandes um etwa 20 Mal (amplitudenmässig) entspricht und eine Messung der Dopplerfrequenz mit einer Genauigkeit ermöglicht, die besser ist als 0,5 %.* (D. K. : 621.317.36 : 621.396.962.23.)

---

(1) Manuscrit reçu le 15 avril 1960.

(2) La première partie de cet article a été publiée dans le n° 62, octobre 1960.

4. — LIGNES A RETARD A QUARTZ.

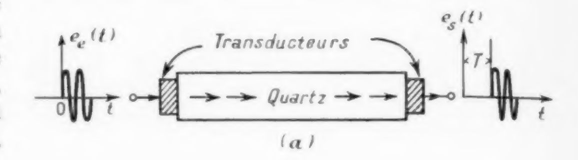
4.1. Considérations générales.

4.1.1. Son fonctionnement physique. — Une ligne à retard idéale est un élément qui retarde un signal d'entrée d'un temps constant T, sans le modifier de quelque manière que ce soit. Cependant, une ligne réelle, n'est pas un élément parfait. Au lieu de donner à sa sortie le signal d'entrée retardé, une ligne non idéale apporte des modifications à ce signal dont les plus importantes sont :

— un certain affaiblissement;
— des déformations de la forme du signal d'entrée, dues à une bande passante limitée de la ligne;
— l'apparition, également, de signaux de sortie parasites à des temps différents du retard voulu.

Un retard est obtenu par un changement de la vitesse de propagation du signal effectué par une transformation de l'énergie électrique en une énergie acoustique. En effet, la vitesse de propagation d'un signal dans un milieu acoustique est de l'ordre de 10^{-5} de la vitesse d'un signal électrique. Une des matières acoustiques les plus utilisées à présent est le quartz ou la silice, et ce sont des lignes à silice que nous avons utilisées dans le système. Le principe élémentaire de ces lignes est représenté sur la figure 36 *a*. L'énergie électrique est transformée à l'entrée de la ligne en énergie acoustique par le transducteur constitué par un quartz piézoélectrique. Cette énergie se propage en ligne droite à une vitesse constante dans le milieu acoustique, et T secondes plus tard, cette énergie acoustique est retransformée en énergie électrique par le transducteur de sortie.

La figure 36 *a* représente une ligne à quartz droite qui est utilisée pour des retards relativement courts (de l'ordre de la microseconde). Quand des retards plus longs sont nécessaires (de 50 à 5 000 μs), le trajet du signal acoustique est replié afin de limiter les dimensions de la ligne. Ce repliage du faisceau acoustique est obtenu, comme en optique, par des réflexions multiples engendrées par la forme polygonale imposée au milieu acoustique (*fig.* 36 *b*).



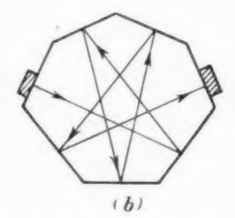


Fig. 36. — Deux types de ligne à retard à quartz : la ligne droite (*a*) à retard T et la ligne à réflexions multiples (*b*).

4.1.2. Circuit équivalent. — Il est pratique, afin d'évaluer le fonctionnement électrique d'une ligne à retard, de considérer son circuit équivalent. Le circuit de la figure 37 représente d'une façon satisfaisante les caractéristiques électriques d'une ligne à retard à quartz avec des transducteurs piézoélectriques. L'impédance d'entrée ne dépend pas de l'impédance de charge, et l'impédance de sortie est indépendante de l'impédance de source. Ces impédances d'entrée et de sortie représentées par L_1, C_1, R_1, C_e et L_2, C_2, R_2, C_s respectivement, sont essentiellement l'impédance des transducteurs piézoélectriques. Quand la fréquence de résonance série de ces quartz est atteinte, les impédances d'entrée et de sortie se réduisent à une résistance en parallèle avec une capacité. Afin d'annuler l'effet

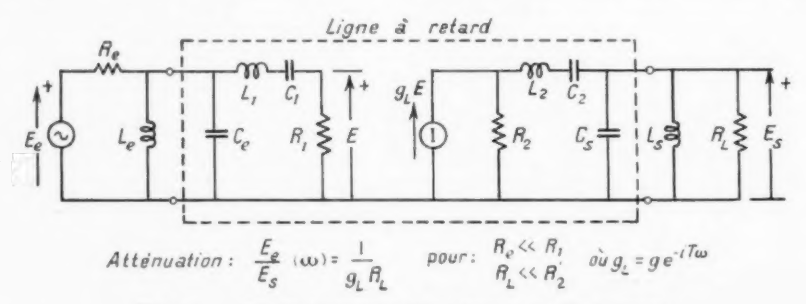


Fig. 37. — Circuit équivalent d'une ligne à retard à quartz.

d'atténuation de ces capacités, dans un montage pratique, elles sont presque toujours neutrodynées avec des inductances en parallèle (*fig.* 37, L_e et L_s).

L'atténuation du signal d'entrée provoquée par les transformations électroacoustiques de l'énergie, aussi bien que par les pertes dans la matière acoustique, est assimilée à une conductance g_1. Donc l'atténuation à la résonance série de quartz $\left(\omega_s^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2}\right)$ est donnée par

$$A_0 = \frac{E_s}{E_e} = g_L R_L \qquad \text{ou} \qquad A_{0\,\mathrm{dB}} = 20 \log_{10}\left[\frac{1}{g_L R_L}\right]$$

pour $R_e < R_1$ et $R_L < R_2$, ce qui est presque toujours le cas. A titre d'exemple, le tableau 4.1 (*voir* Nota) donne des valeurs qui ont été mesurées pour les deux lignes à silice utilisées dans le système.

TABLEAU 4.1.

Mesures effectuées sur les lignes C *et* Q.

Quantités mesurées.	Ligne C (*).	Ligne Q (*).
T, Retard à 20° C (μs)	849,5	1 104
A_0, Atténuation (dans 75 Ω) (dB)	55	44
C_e, Capacité d'entrée (pF)	54,4	113
C_s, Capacité de sortie (pF)	62	106
R_1, Résistance d'entrée (Ω)	4 200	490
R_2, Résistance de sortie (Ω)	4 400	1 800
f_0, Fréquence de mesure (MHz)	30	31

(*) *Nota.* — Ligne C : ligne de la Compagnie Corning Glass Works (U. S. A.). — Ligne Q : ligne de la Compagnie Quartz et Silice (Paris).

Il est évident que les éléments réactifs du schéma équivalent produisent une variation de l'affaiblissement en fonction de la fréquence.

De plus, la ligne à retard présente des variations de l'atténuation et du retard en fonction de la température. Ces deux aspects indésirables sont considérés dans l'exposé qui suit.

4.2. Variation de l'atténuation et du retard.

4.2.1. ATTÉNUATION EN FONCTION DE LA FRÉQUENCE ET DE LA TEMPÉRATURE. — Les variations de l'atténuation en fonction de la fréquence sont dues aux éléments constituants d'une ligne à retard. Les éléments prédominants qui varient avec la fréquence sont les transducteurs et le milieu acoustique (silice). Toutefois, dans une bonne ligne à silice, on obtient une bande passante (entre les points 3 dB) égale à plus de 60 % de la fréquence centrale. Cependant, une grande bande passante est obtenue seulement si les capacités d'entrée et de sortie (C_s et C_e) sont neutrodynées (avec L_e et L_s) pour chaque fréquence à laquelle la mesure est effectuée. Autrement la bande est essentiellement limitée par les circuits représentatifs des transducteurs. Une mesure de l'atténuation en fonction de la fréquence a été effectuée pour les deux lignes essayées dans le système (ligne C et ligne Q, *voir* Nota, tableau 4.1). Le résultat est exposé dans la figure 38.

Cette mesure, réalisée par une méthode de substitution, représente la bande passante des lignes à retard chargées sur 75 Ω ($R_e = R_L = 75$ Ω). De plus, le neutrodynage des capacités a été fait à une seule fréquence ($f_0 = 30$ MHz), car par ce procédé

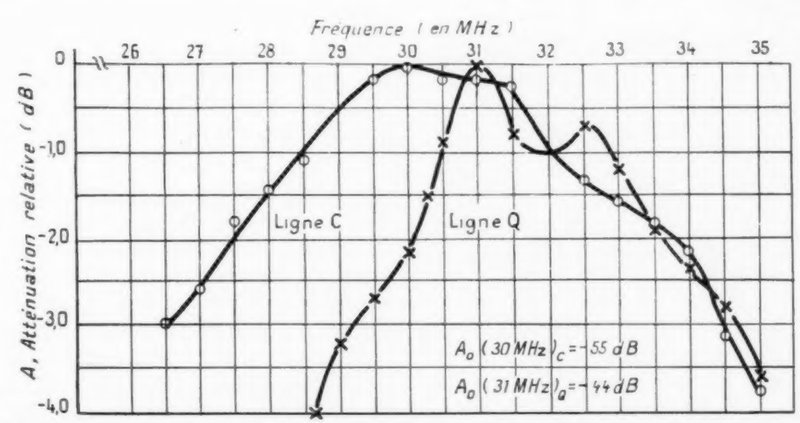


Fig. 38. — Atténuation mesurée en fonction de la fréquence pour ligne C et ligne Q.

on obtient la véritable bande passante de la ligne telle qu'elle est utilisée dans le système.

La déformation de la courbe pour la ligne Q (pour $f = 31$ MHz) est probablement due à une qualité de verre imparfaite (inhomogénéité de la silice) ou à des fréquences de résonance-série différentes pour les deux transducteurs. Comme il a été décrit dans le chapitre 3, cette déformation de la fonction d'atténuation nous a obligé à ajouter un filtre bande passante supplémentaire dans la boucle afin d'obtenir un gain uniforme en fonction de la fréquence.

Il est intéressant de remarquer que les courbes représentées sur la figure 38, qui paraissent être régulières, ne le sont pas en réalité. L'effet des signaux parasites, étudié plus loin, démontre que l'atténuation en fonction de la fréquence présente des ondulations périodiques en amplitude, la fréquence correspondante étant $\frac{1}{2T}$ (où T est le retard de la ligne).

L'atténuation en fonction de la température est un facteur primordial; elle dépend essentiellement des pertes dans le verre (silice), qui diminuent avec une augmentation de la température (*fig.* 39). On

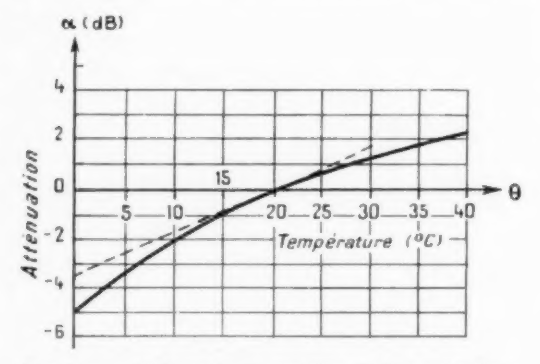


Fig. 39. — Atténuation en fonction de la température.

obtient un coefficient de température $\alpha_\theta = 0{,}18$ dB/°C en traçant une tangente au point $\theta = 20°$ C. Cette variation de 0,18 dB/° C non négligeable de l'atténuation ne peut pas être admise dans le système (*voir* § 2.2.2); donc, on est obligé de thermostater la ligne.

4.2.2. Variations du retard en fonction de la fréquence et de la température. — Les recherches dans ce domaine ont démontré que le retard varie très peu avec la fréquence du signal appliqué. En effet, d'après l'équation de Sutton, le retard est donné par

$$T \approx T_0\left[1 + \frac{K}{f^2}\right],$$

où f est la fréquence (en MHz), T_0 est le retard géométrique (rapport entre la longueur du parcours et la vitesse de propagation), et K est une constante compliquée qui dépend des dimensions du milieu acoustique, de la vitesse de propagation et des autres paramètres. Pour des fréquences assez élevées, les variations du retard avec la fréquence deviennent négligeables. En effet, pour une ligne ayant un retard de 1 100 µs à 30 MHz (ligne Q), le $\frac{\delta T}{T}$ par mégahertz est de l'ordre de $4 \cdot 10^{-6}$ par mégahertz, ce qui donne pour 200 tours dans la boucle ($\delta f \approx 0{,}2$ MHz) un $\frac{\delta T}{T} = 8 \cdot 10^{-7}$, une valeur acceptable pour le système.

Les variations du retard d'une ligne à silice en fonction de la température sont déduites du coefficient de température qui est relié à la vitesse de propagation dans la silice. Le coefficient donné dans la littérature est $\beta_\theta = -77 \cdot 10^{-6}$/°C. Donc la variation du retard ΔT peut être calculée aisément par la formule

$$\Delta T\ (\mu\ \text{secondes}) = -77\ T\ (\Delta\theta),$$

où T est le retard en secondes à la température ambiante et $\Delta\theta$ la variation de température. Par exemple, pour la ligne C de 850 µs, $\Delta T = -0{,}07$ µs/°C. Bien que cette quantité semble petite, le rapport $\frac{\delta T}{T} = 77 \cdot 10^{-6}$/°C est trop élevé pour satisfaire les conditions trouvées dans le chapitre 2 (§ 2.2.1). Il faudrait que les variations de température soient inférieures à $\frac{1}{770}$ °C pour obtenir un $\frac{\delta T}{T} = 10^{-7}$. Il n'est évidemment pas possible de thermostater la ligne à 10^{-3}/°C près, mais il est toutefois essentiel d'atteindre la meilleure régulation possible de la température.

4.3. Effets des signaux parasites.

4.3.1. Leurs causes. — Le défaut le plus important d'une ligne à retard est la présence à sa sortie de signaux parasites qui apparaissent à des retards différents du retard principal. La plupart de ces signaux sont engendrés dans la ligne par suite de la répartition angulaire de l'énergie acoustique qui n'est pas restreinte à un faisceau infiniment étroit. En effet, ce faisceau a une largeur finie et

manifeste des lobes secondaires, analogue à ceux présentés par une antenne (*fig.* 40 *a*). De plus, cette dispersion se produit aussi bien dans le plan vertical qu'horizontal (*fig.* 40 *b*). Donc, l'énergie acoustique peut suivre plusieurs chemins, représentant des parcours différents, et donc des retards différents, pour arriver à la sortie de la ligne. Puisque ces parcours n'ont en général aucun rapport avec le trajet principal, les signaux parasites peuvent être retardés de n'importe quelle valeur par rapport

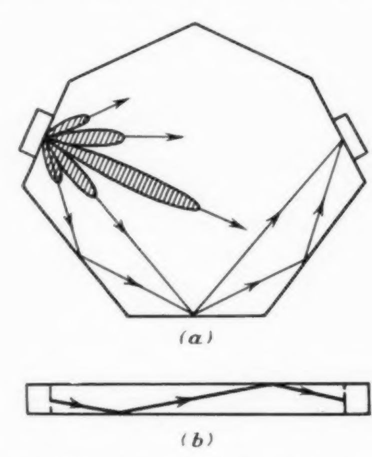


Fig. 40. — Signaux parasites engendrés par des lobes secondaires du faisceau acoustique dans une ligne à réflexions multiples : plan horizontal (*a*) et plan vertical (*b*).

au retard principal. Du fait que les signaux parasites sont produits par des lobes secondaires qui ont des amplitudes réduites, le niveau des parasites est généralement beaucoup plus faible que celui du signal désiré.



Fig. 41. — Trajet du signal parasite à 3 *T* dû aux réflexions sur les transducteurs.

En plus des parasites dus aux lobes secondaires, il en existe un autre, non négligeable, produit par des réflexions sur les transducteurs. L'onde acoustique qui arrive sur le transducteur de sortie est transformée en signal électrique et donne le signal désiré, retardé de *T* secondes. Mais cette transformation n'est pas parfaite; une partie du signal est réfléchie et suit le même trajet que le signal principal, mais en sens inverse. Ensuite, l'onde est réfléchie encore une fois par le transducteur d'entrée et arrive enfin à la sortie 3 *T* secondes après l'application du signal principal à l'entrée (*fig.* 41). Puisque cette onde fait trois fois le parcours dans la ligne, elle subit les pertes apportées par le plus long trajet parcouru; ainsi, l'amplitude du signal de sortie au temps 3 *T* est inférieure à celle de l'onde principale au temps *T*.

4.3.2. Leurs effets. — Dans le domaine du temps, l'effet de la présence de signaux parasites est évidemment de donner des signaux de sortie à des temps autres que le retard *T* désiré. Si l'on considère une impulsion à l'entrée de la ligne au temps $t = 0$, la fonction de sortie sera une suite d'impulsions ayant toutes des retards différents. Cette situation est représentée à la figure 42, où l'on a défini les retards des signaux parasites par rapport à l'impulsion principale retardée de *T* secondes.

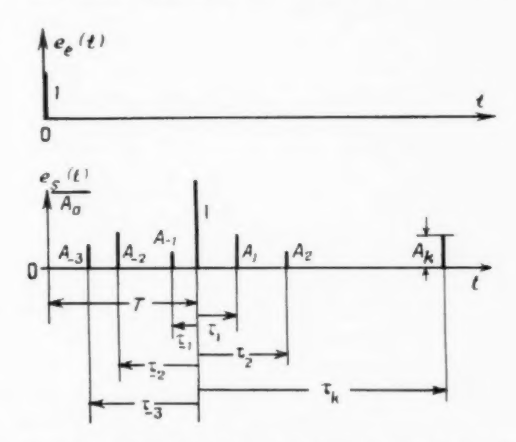


Fig. 42. — Représentation des signaux parasites $e_s(t)$ dans le temps pour une impulsion d'entrée $e_e(t)$.

Comme on le verra plus loin, cette définition a été choisie de cette façon car ce sont ces différences de temps τ_k qui imposent le comportement de la ligne quand on lui applique une onde entretenue. Sur cette figure nous avons considéré l'atténuation (les amplitudes A_k) relative à l'amplitude normalisée (à 1) du signal principal au temps *T*.

Ces signaux parasites ont été mesurés en amplitude et temps en appliquant à la ligne des impulsions périodiques ayant une période de répétition de plus de cinq fois le retard principal afin de pouvoir apprécier les parasites jusqu'à 5 *T*. Le résultat est porté sur le tableau 4.2.

Nous voyons que les niveaux des parasites dans la ligne C sont à environ 20 dB au-dessous de ceux

de la ligne Q. C'est la raison pour laquelle nous avons pu effectuer trois fois plus de tours dans la boucle avec la ligne C qu'avec la ligne Q.

TABLEAU 4.2.

Amplitude et position des signaux parasites mesurées pour les lignes C et Q.

Ligne C.			*Ligne* Q.		
k.	τ_k (µs).	A_k (dB).	k.	τ_k (µs).	A_k (dB).
—8....	787	60	—9....	956	35
—7....	762	60	—8....	710	40
—6....	746	60	—7....	560	48
—5....	648	60	—6....	500	46
—4....	505	60	—5....	380	40
—3....	373	51	—4....	306	45
—2....	255	44	—3....	250	45
—1....	143	51	—2....	206	34
0....	T = 849,5	0	—1....	104	35
1....	142	60	0....	T = 1 104	0
2....	260	50	1....	406	32
3....	326	60	2....	790	30
4....	372	60	3....	1 060	44
5....	1 695	52	4....	2 200	32

Le comportement d'une ligne à retard ayant des signaux parasites peut être plus facilement déterminé en considérant son schéma équivalent qui se compose de $1 + k$ lignes idéales (sans parasites) en parallèles (*fig.* 43). La première de ces lignes produit le retard principal T et une atténuation A_0 sur l'onde d'entrée.

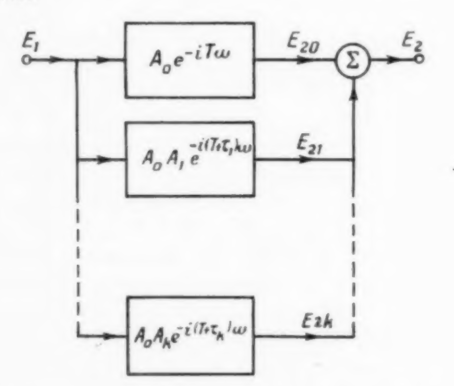


Fig. 43. — Représentation des signaux parasites par des lignes idéales (sans parasites) en parallèle avec la ligne principale.

La caractéristique de transfert dans le domaine des fréquences est donnée par

$$(38) \qquad \frac{E_{20}}{E_1}(\omega) = A_0\, e^{-iT\omega}.$$

Chacune des autres lignes représente un seul signal parasite, et elles ont une caractéristique de transfert similaire à (38), c'est-à-dire que

$$(39) \qquad \frac{E_{2k}}{E_1}(\omega)\bigg|_k = A_0 A_k\, e^{-i(T+\tau_k)\omega},$$

où A_k est l'atténuation rapportée à A_0 (atténuation de la ligne principale).

Cette représentation de lignes en parallèles pour une ligne avec des parasites, nous permet d'étudier la courbe représentant l'atténuation en fonction de la fréquence du signal d'entrée. Considérons d'abord l'effet d'un seul signal parasite ($k = 1$). D'après la figure 43, on voit que le gain pour cette condition est donné par le quotient de la somme des deux signaux de sortie et du signal d'entrée. Donc, (38) et (39) nous donnent pour le gain en fonction de la fréquence

$$(40) \qquad G(\omega) = \frac{E_2}{E_1}(\omega) = A_0\, e^{-iT\omega} + A_0 A_1\, e^{-i(T+\tau_1)\omega}$$

ou encore

$$(41) \qquad G(\omega) = A_0\, e^{-iT\omega}\,[1 + A_1\, e^{-i\tau_1\omega}].$$

Si $A_1 = 0$, ce qui équivaut à une ligne sans parasite, $G(\omega) = A_0\, e^{-iT\omega}$, ce qui signifie que l'amplitude du gain en fonction de la fréquence est une constante égale à A_0; et la phase en fonction de la fréquence est une fonction linéaire ayant une pente égale à T. Donc, le terme $1 + A_1 \exp[-i\tau_1\omega]$ de (41) dû au signal parasite représente une ondulation dans la fonction de gain qui serait autrement uniforme. Ceci devient en effet évident en exprimant ce terme complexe sous forme polaire. Ce procédé donne

$$(42) \qquad 1 + A_1\, e^{-i\tau_1\omega} = 1 + A_1 \cos\tau_1\omega - iA_1 \sin\tau_1\omega$$

ou

$$(43) \qquad |1 + \mathrm{A}_1\, e^{-iT_1\omega}|\, e^{-i\theta(\omega)} = \sqrt{1 + A_1^2 + 2A_1\cos\tau_1\omega} \times e^{-i\theta(\omega)},$$

avec

$$(44) \qquad \theta(\omega) = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{A_1 \sin\tau_1\omega}{1 + A_1\cos\tau_1\omega}\right].$$

Dans une ligne à retard convenable, le niveau de l'amplitude des parasites est très faible par rapport au signal principal (à T); donc, on a $A_1 \ll 1$.

Avec cette condition (43) et (44) deviennent

$$|1 + A_1 e^{-i\tau_1\omega}| \simeq 1 + A_1 \cos\tau_1\omega, \tag{45}$$

$$\theta(\omega) \simeq A_1 \sin\tau_1\omega. \tag{46}$$

L'effet de ces termes sur la fonction de gain globale est facilement évalué en transformant l'équation (41) en forme polaire. Cette opération nous donne

$$|G(\omega)| e^{-i\Phi_G(\omega)} \simeq A_0 e^{-iT\omega}(1 + A_1 \cos\tau_1\omega) e^{-iA_1 \sin\tau_1\omega}, \tag{47}$$

d'où l'on tire les expressions pour l'amplitude et la phase du gain total; soit

$$|G(\omega)| \simeq A_0(1 + A_1 \cos\tau_1\omega), \tag{48}$$

$$\Phi_G(\omega) \simeq T\omega + A_1 \sin\tau_1\omega. \tag{49}$$

Ce résultat, représenté graphiquement sur la figure 44, démontre bien que l'effet d'un signal

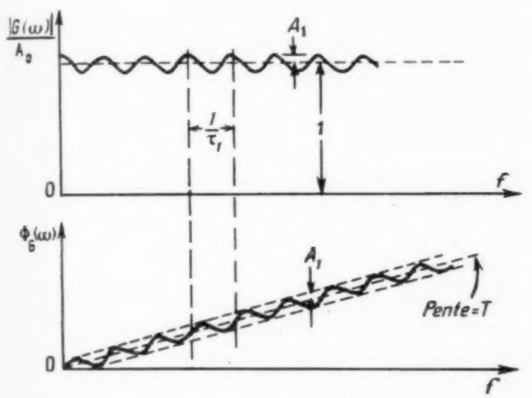


Fig. 44. — Ondulations dans les fonctions de gain et de phase en fonction de la fréquence dues aux signaux parasites.

parasite sur le gain et la phase d'une ligne à retard est de lui apporter des variations sinusoïdales en fonction de la fréquence. La fréquence de répétition de ces variations périodiques est donnée par $\omega = \frac{2\pi}{\tau_1}$. Cette ondulation dans la fonction de gain se produit par suite des différences de phase du signal parasite et du signal principal (au temps T) qui varient avec la fréquence. A la fréquence pour laquelle le signal principal et le signal parasite sont en phase, on a une somme $A_0 + A_0 A_1$ et donc un maximum dans la fonction de gain. Quand le signal parasite est en antiphase, on a $A_0 - A_0 A_1$, ce qui produit un gain minimal.

Il est clair que la présence de plusieurs signaux parasites dans une ligne produirait des termes de modulation supplémentaires dans les fonctions de gain et de phase. Suivant le même calcul que pour un seul signal parasite, on trouve par déduction

$$|G(\omega)| \simeq A_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos\tau_k\omega \right] \tag{50}$$

et

$$\Phi_G(\omega) \simeq T\omega + \sum_{k=1}^{N} A_k \sin\tau_k\omega. \tag{51}$$

Puisque la présence de parasites dans la ligne à retard produit des variations de gain, son utilisation dans le système à boucle fermée apportera aussi des variations du gain de la boucle. Le nombre de tours possible dans la boucle fermée est donc limité par ces variations. Toutefois, en boucle fermée, puisque les parasites n'ont en général aucun rapport avec la période T du système, les signaux parasites ne s'ajoutent pas à chaque tour dans la boucle et ainsi leur effet sur le signal principal qui s'accroît avec le temps est négligeable. Cependant, d'après le tableau 4.2, on voit qu'il apparaît un signal parasite non négligeable à la sortie de la ligne $3\,T$ secondes après l'application du signal d'entrée; c'est le signal parasite qui fait trois fois le trajet dans la ligne à cause des réflexions sur les transducteurs et que nous avons considéré auparavant (§ 4.3.1). C'est donc principalement ce signal parasite qui affecte le gain de la boucle fermée, et puisque $\tau_k = 2\,T$ (*fig.* 42) dans ce cas, d'après (48) on voit que ce signal parasite apporte une modulation de la fonction de gain qui varie de deux périodes sinusoïdales pour une variation de $\frac{1}{T}$ de la fréquence. Ce phénomène est confirmé par les résultats obtenus avec la ligne Q (*fig.* 35). Cependant, les résultats des mêmes expériences avec la ligne C ne confirment pas une telle conclusion, probablement parce que l'effet du signal parasite à $3\,T$, de très faible niveau dans cette ligne à retard, était masqué par les signaux résiduels de l'opérateur, que nous considérerons plus tard (chap. 5).

Dans le chapitre 3, nous avons trouvé que l'amplitude de la 40e impulsion variait de 12,5 % du maximum en utilisant la ligne C et de 48 % pour la ligne Q (*fig.* 35). Ce résultat peut être vérifié par le calcul en utilisant la formule dérivée dans le chapitre 2 [équ. (36)] avec $N = 40$. Pour la ligne C, avec un signal parasite de 52 dB à $3\,T$, on trouve une variation de l'amplitude de 9,5 %, et avec la ligne Q (signal parasite à 32 dB), on obtient une variation de 57 %. L'accord entre le calcul et l'expérience est donc relativement bon. Dans le chapitre 5 nous

verrons que les signaux résiduels de l'opérateur affectent aussi le gain de boucle. Toutefois, on voit que la présence de signaux parasites dans la ligne à retard explique bien les limitations qu'ils apportent au système. L'effet de ces parasites sur le système en boucle fermée est examiné en détail dans le chapitre suivant.

5. — ANALYSE THÉORIQUE DU SYSTÈME EN TENANT COMPTE DES SIGNAUX PARASITES.

Précédemment on a vu que les facteurs les plus importants qui limitent le nombre de tours maximal possible dans le système sont les signaux parasites engendrés dans la ligne à retard ainsi que les signaux résiduels dans un opérateur imparfait. Dans le chapitre 4, on a démontré que les signaux parasites pour le système en boucle ouverte apportent une variation dans la fonction d'atténuation en fonction de la fréquence. On démontrera ici que ces variations sont toujours présentes quand le système est en boucle fermée. L'analyse qui suit se divise en trois parties :

— le calcul de l'effet des signaux parasites dus à une ligne à retard imparfaite;
— le calcul de l'effet de signaux résiduels dans l'opérateur;
— les diverses méthodes possibles pour minimiser ces effets indésirables.

5.1. Calcul du fonctionnement du système avec des signaux parasites dans la ligne à retard.

5.1.1. Calcul exact par la méthode d'itération. — Dans le chapitre 4, on a vu qu'une ligne à retard non idéale produit des signaux parasites à sa sortie à des temps autres que le retard principal T. On a démontré que ces parasites peuvent être représentés schématiquement par des lignes à retard idéales, une pour chaque parasite, en parallèle avec la ligne principale. De plus, puisque le niveau des parasites est très inférieur au niveau du signal principal, on place une forte atténuation en série avec ces lignes. On utilisera la même représentation pour l'analyse qui suit, mais dans le but de présenter un exposé clair, on ne considérera qu'un seul signal parasite car la généralisation dans le cas de plusieurs parasites se fait aisément.

Le système qu'on analysera est donc représenté sur la figure 45. Au lieu de considérer les transformations que subit un signal qui fait plusieurs tours dans la boucle pour trouver l'expression générale du signal de sortie, comme on l'a réalisé dans le chapitre 2, on présente une nouvelle méthode d'itération. Cette méthode, plus formelle que physique, nous permet d'obtenir des résultats plus généraux du fait qu'on tient compte d'un gain principal $\alpha \leq 1$ ainsi que de la présence de signaux parasites. Aussi, afin de simplifier l'analyse, on utilisera dès le début la représentation exponentielle d'une onde sinusoïdale.

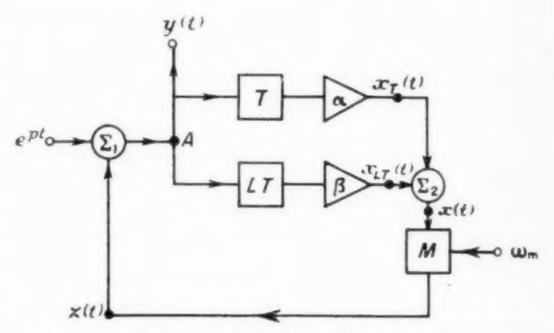


Fig. 45. — Système à boucle fermée en tenant compte d'un signal parasite dans la ligne à retard.

Soit une fonction d'entrée définie par

$$e_i(t) = \mathrm{Re}[e^{pt}], \qquad \text{avec} \quad p = i(\omega_i + \omega_d) \tag{52}$$

(où Re $\triangleq$ partie réelle de)

et la fonction de sortie (au point A) par

$$e_A(t) = \mathrm{Re}[y(t)]. \tag{53}$$

L'opérateur M est défini par $e^{i\omega_m t}$; ainsi la fonction de sortie de l'opérateur est donnée par

$$z(t) = e^{i\omega_m t}\, x(t), \tag{54}$$

valable dans le cas où $x(t) = e^{i\omega t}$, car dans ce cas (54) devient

$$z(t) = e^{i(\omega + \omega_m)t}. \tag{55}$$

Autrement dit, l'opérateur ajoute la fréquence ω_m à l'onde incidente comme auparavant. D'après la figure 45, on voit que la fonction de sortie est donnée par

$$y(t) = e^{pt} + z(t) \tag{56}$$

ou, en substituant (54) dans (56) on a

$$y(t) = e^{pt} + e^{i\omega_m t}\, x(t). \tag{57}$$

La fonction $x(t)$, sortie du deuxième additionneur Σ_2 est

$$x(t) = x_T(t) + x_{LT}(t), \tag{58}$$

où x_T et x_{LT} sont fonction de $y(t)$. Ainsi ce qui sort de la ligne T au temps $t[x_T(t)]$ correspond à l'époque $t - T$ du signal à l'entrée de la ligne affaiblie par l'atténuation $\alpha < 1$; autrement dit on a

$$x_T(t) = \alpha\, y(t - T). \tag{59}$$

Et de la même façon, on a évidemment

$$x_{LT}(t) = \beta\, y(t - LT). \tag{60}$$

En utilisant ces expressions dans (57), nous trouvons

$$y(t) = e^{pt} + e^{i\omega_m t}[\alpha\, y(t - T) + \beta\, y(t - LT)]. \tag{61}$$

Cette expression nous permet de trouver la fonction de sortie à n'importe quelle époque, soit

$$y(t - T) = e^{p(t-T)} + e^{i\omega_m(t-T)}[\alpha\, y(t - 2T) + \beta\, y(t - T - LT)]. \tag{62}$$

En substituant (62) dans (61), ainsi que l'expression pour $y(t - LT)$ trouvée de la même manière, (61) devient

$$\begin{aligned} y(t) = e^{pt} &+ e^{i\omega_m t} \\ &\times \alpha \{ e^{p(t-T)} + e^{i\omega_m(t-T)} \\ &\qquad \times [\alpha\, y(t - 2T) + \beta\, y(t - T - LT)] \} \\ &+ e^{i\omega_m t}\beta \{ e^{p(t-LT)} + e^{i\omega_m(t-LT)} \\ &\qquad \times [\alpha\, y(t - T - LT) \\ &\qquad + \beta\, y(t - 2LT)] \}. \end{aligned} \tag{63}$$

Cette expression ne peut être réduite à une forme intéressante que dans le cas où la ligne LT donne un retard qui est multiple du retard principal T; autrement dit, il faut que L soit un nombre entier. Nous justifierons que cette condition enlève peu à la signification du résultat dans le paragraphe 5.1.2.3. Utilisant donc cette condition supplémentaire, (63) peut être mis sous une forme beaucoup plus simple. En effet, dans ce cas, on a $e^{\pm i\gamma\omega_m T} = 1$ (γ, nombre entier), car comme avant $\omega_m T = 2\pi$. L'équation (63) devient alors

$$\begin{aligned} y(t) = e^{pt} &\times \{ 1 + e^{i\omega_m t}(\alpha\, e^{-pT} + \beta\, e^{-pLT}) + e^{i2\omega_m t} \\ &\qquad \times \alpha[\alpha\, y(t - 2T) + \beta\, y(t - T - LT)] \\ &+ e^{i2\omega_m t}\beta[\alpha\, y(t - T - LT) \\ &\qquad + \beta\, y(t - 2LT)] \}. \end{aligned} \tag{64}$$

Posons maintenant

$$q = e^{i\omega_m t}(\alpha\, e^{-pT} + \beta\, e^{-pLT}). \tag{65}$$

Par une méthode directe d'itération, en substituant la forme trouvée à partir de (61) des fonctions $y(t - 2T)$, $y(t - LT - T)$ et $y(t - 2LT)$ dans (64), cette équation (64) après N itérations se réduit à

$$y(t) = e^{pt}[1 + q + q^2 + \ldots + q^N] = e^{pt}\sum_{k=0}^{N} q^k \tag{66}$$

ou, d'après (14), cette expression est équivalente à

$$y(t) = e^{pt}\left[\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}\right]. \tag{67}$$

Cette forme simple représente le fonctionnement général du système avec un signal parasite dans la ligne à retard.

5.1.2. Signification du résultat. — 5.1.2.1. *Cas sans signal parasite.* — Avant d'approfondir la signification du résultat obtenu [équ. (67)], nous voulons démontrer que cette formule se réduit à la forme trouvée au chapitre 2 dans les mêmes conditions. Posons alors $\beta = 0$, ce qui signifie l'absence de parasite. Avec cette condition, (65) devient

$$q = \alpha\, e^{i\omega_m t}\, e^{-pT}. \tag{68}$$

En substituant $i(\omega_i + \omega_d)$ pour p, et en posant que $\omega_i T = R\, 2\pi$ (avec R un entier), cette équation peut être écrite sous la forme

$$q = \alpha\, e^{i(\omega_m t - \omega_d T)}. \tag{69}$$

La substitution de cette expression dans (67) donne

$$y(t) = e^{i(\omega_i + \omega_d)t}\left[\frac{1 - \alpha^{N+1}\, e^{i(N+1)u}}{1 - \alpha\, e^{iu}}\right], \tag{70}$$

avec

$$u = \omega_m t - \omega_d T. \tag{71}$$

La partie réelle de cette expression d'après (53) donne la forme générale du signal de sortie $e_A(t)$ pour le cas d'une ligne à retard sans signal parasite, et avec un gain $\alpha < 1$. Afin de démontrer qu'on retrouve les mêmes équations que celles du chapitre 2, posons de plus : $\alpha = 1$. Dans ce cas, (70) devient

$$y(t) = e^{i(\omega_i + \omega_d)t}\left[\frac{1 - e^{i(N+1)u}}{1 - e^{iu}}\right]. \tag{72}$$

En évaluant alors cette expression à l'époque $t = t' + NT$ (avec $0 \leq t' \leq T$), en supprimant les

facteurs $\omega_i T$ et $\omega_m T$, comme nous l'avons fait auparavant, et en prenant la partie réelle de $y(t)$, l'équation (72) se réduit à la forme

$$(73)\quad e_A(t')_N = \frac{\sin\left[\left(\frac{N+1}{2}\right)u\right]}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \times \cos\left[\left(\omega_i + \omega_d + \frac{N}{2}\,\omega_m\right)t' + \frac{N}{2}\,\omega_d T\right]$$

qui est la même équation exprimée dans (16).

Pour trouver la forme de l'enveloppe des impulsions en fonction de N, il suffit de poser $u = 0$ et $\alpha < 1$. Les conditions substituées dans (70) nous donnent

$$(74)\quad y(t) = e^{i(\omega_i+\omega_d)t}\left[\frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}\right].$$

Il est clair que la fonction d'enveloppe est donnée par le deuxième terme de (74), soit

$$(75)\quad A(N, \alpha) = \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha} \qquad (\text{pour } \alpha < 1)$$

qui est identique à l'équation (31) trouvée dans le chapitre 2, qui a permis de calculer les courbes de saturation (*fig.* 15).

5.1.2.2. *Cas ou le gain est* $\alpha = 1$ *avec un signal parasite.* — Dans le chapitre 4, on a vu que le signal parasite le plus gênant dans la ligne à retard pour le bon fonctionnement du système est celui qui apparaît au temps $3\,T$. On analysera donc le système en boucle fermée avec ce parasite, ainsi $L = 3$, et de plus on posera que le gain principal $\alpha = 1$, car l'effet d'un gain inférieur à 1 a déjà été traité en détail (§ 2.2.2). Avec ces conditions, (65) devient

$$(76)\quad q = e^{i\omega_m t}\, e^{-pT}(1 + \beta\, e^{-2pT})$$

ou, avec $p = i(\omega_i + \omega_d)$, et en supprimant comme avant les facteurs de 2π, on a

$$(77)\quad q = e^{iu}(1 + \beta\, e^{-i\xi}),$$

où u est toujours défini par (71) et ξ, fonction de la fréquence Doppler ω_d est donnée par

$$(78)\quad \xi = 2\,\omega_d T = 4\pi\,\frac{\omega_d}{\omega_m}.$$

Il est clair que ce paramètre ξ varie entre 0 et 4π pour $0 \leq \omega_d \leq \omega_m$. En substituant (77) dans (67), on trouve

$$(79)\quad y(t) = e^{pt}\left[\frac{1 - e^{i(N+1)u}(1+\beta\, e^{-i\xi})^{N+1}}{1 - e^{iu}(1+\beta\, e^{-i\xi})}\right].$$

Le deuxième facteur de (79) varie beaucoup plus lentement que le terme e^{pt}, et représente donc la fonction de modulation de l'amplitude des impulsions. Définissons alors

$$(80)\quad E_N(u, \xi) = \left|\frac{1 - e^{i(N+1)u}(1+\beta\, e^{-i\xi})^{N+1}}{1 - e^{iu}(1+\beta\, e^{-i\xi})}\right|.$$

C'est cette fonction qui impose la forme de la suite d'impulsions en fonction de N (ou du temps). La condition qui donnait auparavant le maximum de cette fonction (pour un N donné) quand β s'annulait, était $u = 0$. Cette condition est encore valable pourvu que $\beta \ll 1$, ce qui est toujours le cas pour une ligne à retard de qualité moyenne. En posant alors $u = 0$, (80) devient

$$(81)\quad E_N(\xi) = \left|\frac{1-(1+\beta\, e^{-i\xi})^{N+1}}{-\beta\, e^{-i\xi}}\right|.$$

Cette expression peut être simplifiée par un développement en série binômiale du facteur $(1+\beta e^{-i\xi})^{N+1}$. Ce procédé, en définissant $\delta = \beta\, e^{-i\xi}$ nous donne

$$(82)\quad (1+\delta)^{N+1} = 1 + (N+1)\delta + \frac{(N+1)N}{2!}\,\delta^2 + \frac{(N+1)N(N-1)}{3!}\,\delta^3 + \ldots.$$

Puisque β est très petit ($\beta \ll 1$), l'effet du signal parasite ne se manifeste pas avant un nombre de tours N assez grand; autrement dit, l'accumulation pour des faibles valeurs de N est presque linéaire. Il est donc intéressant d'étudier (81) pour N grand ($N > 100$). Pour cette condition, l'équation (82) peut être approchée par

$$(83)\quad (1+\delta)^{N+1} \sim 1 + N\delta + \frac{(N\delta)^2}{2!} + \frac{(N\delta)^3}{3!} + \ldots.$$

En effet, pour $N > 100$, l'erreur commise par ce procédé est inférieure à 1 %. Il est clair que la série représentée par (83) est le développement de $e^{N\delta}$. On peut alors exprimer (81) sous la forme

$$(84)\quad E_N(\xi) \sim \left|\frac{-e^{i\xi}}{\beta}\left(1 - e^{\beta N e^{-i\xi}}\right)\right|.$$

Cette fonction (84) peut être étudiée de deux manières. D'abord on la considère en fonction de N avec ξ comme paramètre, ce qui donnera la fonction d'enveloppe des impulsions, qui permettra d'étudier dans quelles conditions l'accumulation est une fonction linéaire. Ensuite, on l'examinera pour un N donné (N comme paramètre) en prenant ξ comme la variable indépendante, ce qui donnera la variation du gain en fonction de la fréquence Doppler.

Examinons alors l'effet de ξ sur l'accumulation. Il est clair que si $\beta = 0$, il n'y a pas de signal parasite et l'accumulation suit une loi linéaire (*fig.* 46).

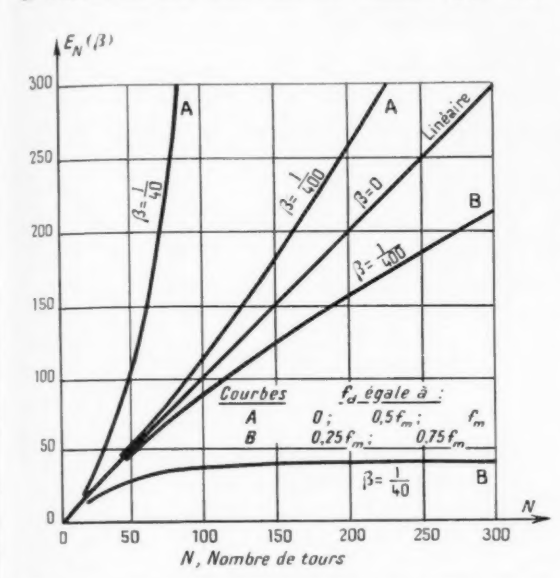


Fig. 46. — Effet sur l'accumulation d'un signal parasite pour plusieurs valeurs de la fréquence f_d et avec deux valeurs du niveau du parasite, β.

Avec $\beta > 0$ et $\xi = 0$, 2π ou 4π, l'effet du signal parasite est le plus accentué. En effet, pour ce cas (84) se réduit à

$$(85) \qquad E_N(\xi)\Big|_{\xi=0,\,2\pi,\,4\pi} = \frac{1}{\beta}(e^{\beta N} - 1)$$

qui est de la forme exponentielle positive (*fig.* 46). Pour $\xi = \pi$ ou 3π, l'effet du parasite est de sens inverse; il s'ensuit donc une diminution du gain. Avec cette condition, (84) devient

$$(86) \qquad E_N(\xi)\Big|_{\xi=\pi,\,3\pi} = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta N}),$$

ce qui donne la forme exponentielle négative; ou la courbe saturée dans la figure 46. D'autres valeurs de ξ donneraient des courbes intermédiaires situées entre les deux courbes limites calculées, mais elles offrent peu d'intérêt. D'après la figure 46, on voit que l'effet des signaux parasites est bien d'affecter le gain de la boucle (α). Suivant la valeur de la fréquence f_d (et donc ξ), on obtient un gain supérieur, égal ou inférieur à 1, qui provoque une accumulation suivant une loi exponentielle positive, linéaire, ou exponentielle négative. Ces courbes de la figure 46 ont été calculées pour deux valeurs de β qui correspondent au niveau du signal parasite à $3\,T$ des deux lignes utilisées (*voir* chap. 4). Il est donc clair que pour le bon fonctionnement du système en boucle fermée, le niveau de ce signal parasite doit être aussi faible que possible.

Afin de mieux discerner des variations de gain dues aux signaux parasites en fonction de la fréquence Doppler f_m, on calculera maintenant $E_N(\xi)$ en fonction de ξ en prenant N comme paramètre. Au lieu d'utiliser la formule approximative (84) trouvée ci-dessus, un autre procédé donne le résultat recherché plus directement. Comme auparavant, nous développons le facteur $(1 + \beta\, e^{-i\xi})^{N+1}$ en série binomiale. Ce procédé, après une division par $-\beta\, e^{-i\xi}$ [*voir* équ. (81)], donne

$$(87) \qquad E_N(\xi) = (N+1)\,|\,1 + B_1 e^{-i\xi} + B_2 e^{-i2\xi} + \ldots + B_k e^{-ik\xi} + \ldots\,|,$$

où

$$(88) \qquad B_k = \frac{N!\,\beta^k}{(N-k)!\,(k+1)!} \qquad (\text{pour } k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Afin d'apprécier l'ordre de grandeur des coefficients B_k, ceux-ci ont été calculés pour $k = 1$, 2, et 3, pour un $\beta = \frac{1}{400}$ (ce qui correspond au signal $A_s = 52$ dB de la ligne C; tableau 4.2) pour plusieurs valeurs de N (tableau 5). D'après ce tableau, on voit qu'on peut négliger tous les coefficients d'un ordre supérieur à B_2 pour $0 < N < 200$, car ils sont très petits par rapport à $B_0 = 1$ (le plus grand, B_3, est 0,5 % de B_0 pour $N = 200$). $E_N(\xi)$ peut alors être approchée par B_0, B_1, et B_2 avec très peu d'erreur. Cette approximation donne [de (87)]

TABLEAU 5.

Valeurs des trois premiers coefficients d'après l'équation (88) pour $\beta = 0{,}0025$, en fonction de N.

N.	B_1.	B_2.	B_3.
0	0	0	0
25	0,031	0,001	0,0000
50	0,063	0,003	0,0001
100	0,125	0,010	0,0006
200	0,250	0,041	0,0051
400	0,500	0,166	0,0414
800	1,000	0,666	0,3321

$$(89) \qquad \frac{E_N(\xi)}{(N+1)} \simeq |\,1 + B_1 e^{-i\xi} + B_2 e^{-i2\xi}\,|.$$

En remplaçant les termes exponentiels par leur forme équivalente, on a, pour l'amplitude de la fonction

$$(90)\qquad \frac{E_N(\xi)}{(N+1)} \simeq \sqrt{\begin{cases}[1+B_1\cos\xi+B_2\cos 2\xi]^2\\ \quad+[B_1\sin\xi+B_2\sin 2\xi]^2.\end{cases}}$$

En effectuant les opérations indiquées, et en supprimant les produits $B_j\, B_k$ qui sont négligeables, (90) devient

$$(91)\qquad E_N(\xi) \sim (N+1)\sqrt{1+2B_1(N)\cos\xi+2B_2(N)\cos 2\xi}.$$

Ici on a remplacé B_k par $B_k(N)$ pour bien démontrer que ces coefficients sont fonction de N. Quand $B_1(N)$ et $B_2(N)$ sont petits relativement à 0,5, l'approximation $\sqrt{(1+\delta)} \simeq 1+\frac{1}{2}\delta$ peut être utilisée. Cette approximation supplémentaire donne

$$(92)\qquad E_N(\xi) \simeq (N+1)[1+B_1(N)\cos\xi+B_2(N)\cos 2\xi],$$

ce qui n'est valable dans notre cas que pour $0 < N < 25$. D'après cette dernière équation, on voit que l'amplitude de E_N pour un N donné varie d'une façon périodique. Puisque $\xi = 2\,\omega_d\, T$ [équ. (78)], il est clair que le terme $B_1 \cos\xi$ varie de deux périodes pour $0 \leq \omega_d \leq \omega_m$, et que $B_2 \cos 2\xi$ varie évidemment deux fois plus vite (mais avec une amplitude beaucoup plus petite). Si les autres coefficients B_k n'avaient pas été négligés, l'expression (92) aurait été

$$(93)\qquad E_N(\xi) \simeq (N+1)[1+B_1(N)\cos\xi+B_2(N)\cos 2\xi + \ldots + B_k(N)\cos k\xi + \ldots].$$

Toutefois, il ne faut pas oublier que cette formule n'est valable que pour un nombre de tours réduit $\left(N < 25,\ \text{pour}\ \beta = \frac{1}{400}\right)$. En vérité, on voit [de (88)] que les coefficients $B_k(N)$ sont fonction de N et de β.

Pour $N \gg 1$, l'équation (88) peut, avec très peu d'erreur, être mise sous la forme $B_k \approx \frac{(N\beta)^k}{(k+1)!}$. Avec cette condition, (91) devient

$$(94)\qquad E_N(\xi) \sim (N+1) \times\sqrt{\begin{cases}1+2\left(\frac{N\beta}{2!}\right)\cos\xi+2\,\frac{(N\beta)^2}{3!}\cos 2\xi\\ \quad+\ldots+\frac{2(N\beta)^k}{(k+1)!}\cos k\xi+\ldots\end{cases}}.$$

Cette formule est valable à 5 % près si $N\beta \leq 0{,}1$, ce qui revient à dire que N doit être inférieur à 40 pour un $\beta = \frac{1}{400}$, et à 4 pour $\beta = \frac{1}{40}$. Cette équation offre donc peu d'intérêt pour des $\beta > \frac{1}{400}$, mais nous l'avons considérée pour montrer que B_k dépend du produit $N\beta$.

Le calcul de $E_N(\xi)$ a été effectué en fonction de ξ $\left(\text{ou de } f_d, \text{ car } f_d = \frac{\xi}{4\pi T}\right)$ pour $N = 39$ et pour deux valeurs de β en utilisant la formule (91) et en calculant les B_k exacts d'après (88), le résultat de ce calcul est porté à la figure 47. Quand $\beta = \frac{1}{400}$,

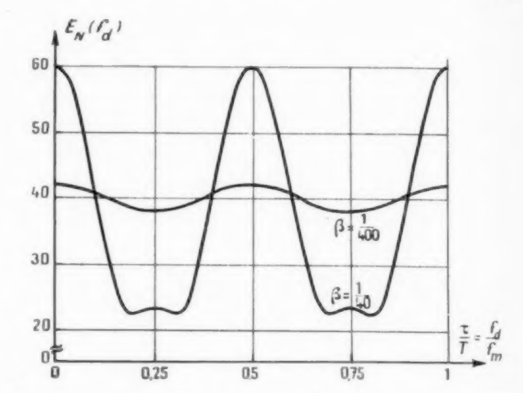


Fig. 47. — Variation de l'amplitude de la 39ᵉ impulsion en fonction de la fréquence f_d pour deux valeurs du niveau du parasite β.

la variation de E_N, presque sinusoïdale, est comprise entre 38 et 42 tours, soit une variation de ± 5 % (à comparer avec la figure 35). Avec $\beta = \frac{1}{40}$, cette variation n'est plus sinusoïdale car le terme B_2 n'est plus négligeable; aussi, dans ce cas, on voit que la variation de $E_N(\xi)$ est approximativement dix fois la variation trouvée précédemment, soit ± 50 %. Le calcul pour un nombre de tours cinq fois plus grand ($N = 200$) pour $\beta = \frac{1}{400}$ révèle que la forme est toujours presque sinusoïdale, mais que la variation est aussi cinq fois sa valeur précédente, soit ± 25 %.

5.1.2.3. *Cas où le gain est $\alpha < 1$ avec signal parasite.* — Il est évident d'après l'analyse précédente que le système en boucle fermée ne peut pas fonctionner avec $\alpha = 1$, car il existe des fréquences f_d pour lesquelles le gain effectif est supérieur à 1 à cause des signaux parasites qui s'ajoutent en phase avec le signal principal (*fig.* 46, courbes A). Nous considérons alors le cas d'un $\alpha < 1$ avec $\beta > 0$, afin de trouver la valeur à laquelle α doit être fixée pour que le gain effectif (avec parasites) soit égal ou inférieur à 1 pour toutes les fréquences f_d.

La relation qu'on désire connaître est aisément

déduite suivant le même procédé de calcul que nous avons déjà effectué. Définissons alors le rapport entre le niveau du parasite et celui du signal principal par $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$. Avec cette définition, (65) devient

$$q = \alpha\, e^{iu}(1 + \gamma\, e^{-i\xi}), \tag{95}$$

où $\xi = 2\,\omega\,/\,T$ comme avant (78). En substituant (95) dans (67), on a

$$y(t) = e^{pt}\left[\frac{1 - \alpha^{N+1}\, e^{i(N+1)u}\,(1 + \gamma\, e^{-i\xi})^{N+1}}{1 - \alpha\, e^{iu}(1 + \gamma\, e^{-i\xi})}\right]. \tag{96}$$

Ensuite, en posant $\delta = \gamma\, e^{-i\xi}$ et en choisissant le maximum des impulsions ($u = 0$), nous déduisons la fonction d'enveloppe [de (96)], donnée par

$$E_N(\delta, \alpha) = \left|\frac{1 - \alpha^{N+1}(1 + \delta)^{N+1}}{1 - \alpha(1 + \delta)}\right|. \tag{97}$$

On veut évidemment examiner $E_N(\delta, \alpha)$ pour un α inférieur à 1, mais presque égal à 1. Posons alors $\alpha = 1 - \varepsilon$ (où $\varepsilon \gtrsim 0$). On a donc à résoudre $(1 - \varepsilon)^{N+1}$, mais puisque ε est très voisin de zéro, on peut utiliser l'approximation, $(1 - \varepsilon)^{N+1} \simeq e^{-(N+1)\varepsilon}$, comme on l'a fait précédemment. Par le même procédé, le facteur $(1 + \delta)^{N+1} \simeq e^{+(N+1)\delta}$ pour un δ petit [équ. (83)]. L'équation (97) peut alors être approchée par la formule suivante :

$$E_N(\delta, \varepsilon) \sim \left|\frac{1 - e^{-(N+1)(\varepsilon - \delta)}}{\varepsilon - \delta + \varepsilon\delta}\right|. \tag{98}$$

Cette formule peut être exprimée en fonction de ε et β, ce qui est plus pratique, en remplaçant δ par $\gamma e^{-i\xi}$; ou, puisque $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$, on a

$$\delta = \frac{\beta}{\alpha}\, e^{-i\xi} = \frac{\beta}{1 - \varepsilon}\, e^{-i\xi}.$$

La substitution de cette forme de δ dans (98) donne

$$E_N(\beta, \varepsilon, \xi) = \left|\frac{1 - e^{-(N+1)\left[\varepsilon - \left(\frac{\beta}{1-\varepsilon}\right) e^{-i\xi}\right]}}{\varepsilon - \beta\, e^{-i\xi}}\right|. \tag{99}$$

On voit que cette expression est de la forme $A(1 - e^{\beta x})$, comme l'équation (86), si

$$\varepsilon > \frac{\beta}{1 - \varepsilon}\, e^{-i\xi}.$$

Il faut donc que $\varepsilon^2 - \varepsilon + \beta\, e^{-i\xi} < 0$. Afin de trouver la relation entre ε et β, on se met dans un cas limite et l'on pose $\varepsilon^2 - \varepsilon + \beta\, e^{-i\xi} = 0$. Ce procédé nous donne

$$\varepsilon \geq \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 - 4\beta\, e^{-i\xi}}\right]. \tag{100}$$

Puisque β est très petit ($\beta \ll 1$) dans presque tous les cas intéressants, on commet très peu d'erreurs en disant que (99) a une forme exponentielle (négative) quand

$$\varepsilon \geq \beta\, e^{-i\xi}. \tag{101}$$

De ce résultat, il s'ensuit que ε doit être supérieur à la plus grande valeur de $\beta\, e^{-i\xi}$, soit supérieur à $+\beta$. Cette condition est réalisée quand $\xi = k\, 2\pi$ (avec $k = 0, 1, 2, \ldots$). Pour cette condition, cela revient à dire que $\varepsilon \geq \beta$. Prenons donc $\varepsilon = \beta$. Quand $\xi = k\, 2\pi$ (k entier), la fonction d'accumulation E_N est presque linéaire. Mais pour d'autres fréquences (ξ), par exemple pour la plus mauvaise, $\xi = (2k + 1)\pi$ (k entier), et l'on a $e^{-i\xi} = -1$. L'équation (99) donne alors

$$E_N \simeq \frac{1}{2\beta}\left[1 - e^{-2(N+1)\beta}\right]. \tag{102}$$

La valeur limite de cette fonction est donc $E_N(N \to \infty) = \frac{1}{2\beta}$. A titre d'exemple, avec $\beta = \frac{1}{400}$ (ligne C), cette valeur limite est 200. Or, la valeur maximale du nombre de tours trouvée en laboratoire était de cet ordre de grandeur.

Il est donc évident que le nombre limite de tours pour la plus mauvaise fréquence f_d est égal à $\frac{1}{2\beta}$ $\left(\text{au lieu de } \frac{1}{1-\alpha} \text{ pour le cas sans parasite}\right)$. Autrement dit, la présence d'un signal parasite dans la ligne à retard, qui pour certains cas augmente le gain effectif de la boucle, oblige à faire fonctionner le système avec un gain $\alpha < 1$, et ainsi limite le nombre de tours maximal possible à la valeur de saturation $\frac{1}{2\beta}$.

L'explication physique de l'effet des signaux parasites est facile à comprendre en se reportant à la figure 45. Au temps initial $t = 0$, l'instant où l'onde est appliquée à l'entrée du système, le signal progresse à travers les deux lignes à retard qui sont en parallèle. T secondes plus tard, le signal sort de la ligne principale et continue à faire le tour dans la boucle fermée, donnant éventuellement des impulsion séparées de T secondes. Mais le signal parasite sort de la deuxième ligne $3\,T$ secondes (pour un $L = 3$) suivant l'instant initial. Ce signal parasite s'ajoute alors

au signal principal qui existe dans la boucle à cet instant-là; il s'ajoute ainsi à la troisième impulsion principale. Ensuite, les deux signaux continuent leur trajet dans la ligne T. Ainsi, l'amplitude de l'impulsion principale a été augmentée par l'amplitude du parasite. Bien entendu, ceci se produit seulement si les deux signaux sont en phase, ce qui est le cas, comme on l'a déjà vu, pour $f_d = 0$, $\frac{f_m}{2}$ ou f_m. Pour d'autres valeurs de f_d, le parasite se retranche du signal principal, donnant ainsi un gain effectivement inférieur à α. Puisque toutes les impulsions donnent naissance à des signaux parasites, l'effet est cumulatif, et c'est pourquoi l'amplitude des impulsions suit une loi exponentielle (positive ou négative suivant f_d) que l'analyse mathématique ainsi que l'expérience démontrent.

Maintenant, on comprend pourquoi des signaux parasites qui existent à des temps n'ayant pas de rapport avec le retard principal T (n'étant pas un nombre entier ou sous-multiple de T) ne peuvent pas s'accumuler. On était donc fondé à ne considérer que le cas de L entier dans l'exposé théorique.

5.2. Calcul du fonctionnement du système avec un opérateur imparfait.

5.2.1. Calcul exact par la méthode d'itération. — Il serait intéressant maintenant d'étudier l'effet sur le système de signaux résiduels engendrés dans l'opérateur. En effet, dans le chapitre 3, on a vu qu'un opérateur imparfait donne des signaux à sa sortie pour d'autres fréquences que celle qu'on désire. Rappelons que la fonction de l'opérateur était d'ajouter la fréquence ω_m au signal d'entrée à la fréquence ω_i. Les signaux résiduels les plus importants (*fig.* 48) se trouvent aux fréquences ω_i

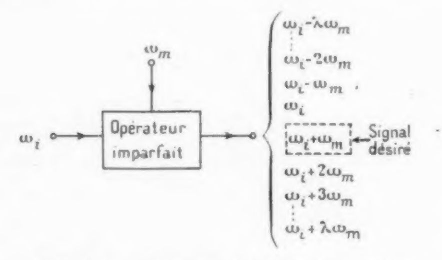


Fig. 48. — Signaux résiduels à la sortie d'un opérateur imparfait.

et $\omega_i - \omega_m$, et aux harmoniques $\omega_i \pm \lambda\omega_m$ (avec λ un entier), A cause d'une dissymétrie dans l'un ou l'autre des modulateurs symétriques, le signal à la fréquence porteuse ω_i passe à travers l'opérateur sans une modification de sa fréquence (mais avec un affaiblissement de son niveau), donnant ainsi le signal résiduel à la fréquence porteuse. Le signal qui représente la bande latérale inférieure $\omega_i - \omega_m$ est dû à l'inégalité des gains entre les deux modulateurs symétriques (*fig.* 17). Puisque leurs gains sont presque égaux, ce signal résiduel est aussi à un niveau très réduit.

Afin d'analyser leur effet sur le système, on a construit le modèle représenté dans la figure 49.

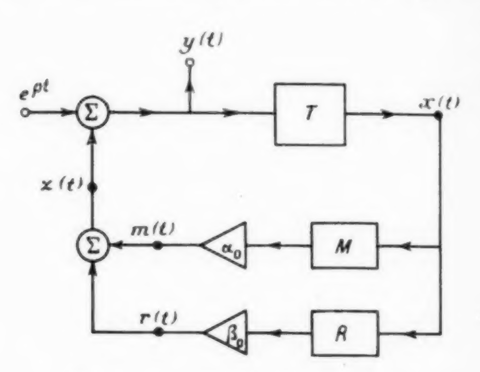


Fig. 49. — Représentation du système avec un opérateur imparfait par l'addition d'un autre opérateur R en parallèle.

Comme pour le cas de signaux parasites dans la ligne à retard, on traitera ici le système avec un seul signal résiduel dans l'opérateur, car l'extrapolation au cas de plusieurs signaux résiduels est immédiate. De plus, pour cette analyse, on considère que la ligne à retard est parfaite (sans parasites ni affaiblissement, $\alpha = 1$). Pour inclure le signal résiduel, on définit un nouvel opérateur R (qui est parfait), qu'on met en parallèle avec l'ancien opérateur M, considéré comme parfait (*fig.* 49). Comme avant, on utilisera la forme exponentielle pour la représentation d'un signal sinusoïdal. Les équations (52) et (53) s'appliquent donc aussi à cette analyse. L'opérateur M est toujours défini par $e^{i\omega_m t}$ mais on considère maintenant son gain égal à $\alpha_0 < 1$; la fonction de sortie de cet opérateur est ainsi donnée par

$$m(t) = \alpha_0 \, e^{i\omega_m t} \, x(t). \qquad (103)$$

On définit l'opérateur R, qui tient compte d'un signal résiduel, comme système qui ajoute la fréquence ω_r à la fréquence d'entrée, et atténue ce signal par le gain $\beta_0 < 1$. Autrement dit, la fonction

de sortie de R et β_0 est définie par

$$(104) \qquad r(t) = \beta_0 e^{i\omega_r t} x(t).$$

On traite le cas où $\omega_r = \lambda\omega_m$ avec $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm k$. Il est donc clair qu'avec $\lambda = 0$, on tombe sur le cas d'un signal résiduel à la fréquence ω_i ; et avec $\lambda = -1$, on a un signal résiduel à la fréquence $\omega_i - \omega_m$, la bande latérale inférieure. Pour $\lambda = +1$, l'opérateur R effectue la même fonction que l'opérateur M : ce cas n'offre donc pas d'intérêt. Cependant, les valeurs positives et négatives de $|\lambda| > 1$, qui indiquent la présence des harmoniques, ne sont pas à négliger.

Avec ces définitions, l'analyse s'effectue par le même procédé d'itération utilisé auparavant (§ 5.1). Le signal de sortie est donc donné par

$$(105) \qquad y(t) = e^{pt} + z(t) \qquad [\text{où } p = i(\omega_i + \omega_d)],$$

avec

$$(106) \qquad z(t) = m(t) + r(t)$$

ou, en utilisant les relations (103) et (104), cette dernière équation devient

$$(107) \qquad z(t) = [\alpha_0 e^{i\omega_m t} + \beta_0 e^{i\omega_r t}]\, x(t).$$

Mais, comme avant

$$(108) \qquad x(t) = y(t - T)$$

et donc, on a évidemment

$$(109) \qquad z(t) = [\alpha_0 e^{i\omega_m t} + \beta_0 e^{i\omega_r t}]\, y(t - T).$$

La substitution de (109) dans (105) nous donne

$$(110) \qquad y(t) = e^{pt} + [\alpha_0 e^{i\omega_m t} + \beta_0 e^{i\omega_r t}]\, y(t - T).$$

Le procédé d'itération s'effectue à partir de cette équation en remplaçant $y(t - T)$ par sa valeur trouvée d'après cette formule (110), ce qui nous donne

$$(111) \qquad \begin{aligned} y(t) = e^{pt} &+ [\alpha_0 e^{i\omega_m t} + \beta_0 e^{i\omega_r t}]\, e^{p(t-T)} \\ &+ [\alpha_0 e^{i\omega_m t} + \beta_0 e^{i\omega_r t}] \\ &\quad \times [\alpha_0 e^{i\omega_m(t-T)} + \beta_0 e^{i\omega_r(t-T)}]\, y(t - 2T). \end{aligned}$$

On continue ce processus en remplaçant $y(t - 2T)$ par sa valeur trouvée d'après (110) et ainsi de suite. Comme avant, les termes $e^{ik\omega_m T} = 1$ (avec k un entier), car $\omega_m T = 2\pi$. Aussi, puisque

$$(112) \qquad \omega_r = \lambda\omega_m \qquad (\text{avec } \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

il est clair que les termes $e^{ik\omega_r T}$ sont aussi de valeur unitaire, car on a $e^{ik\omega_r T} = e^{ik\lambda\omega_m T} = 1$. Avec ces conditions, et en posant

$$(113) \qquad q_r = e^{-i\omega_d T}[\alpha_0 e^{i\omega_m t} + \beta_0 e^{i\omega_r t}],$$

on arrive au résultat recherché, soit

$$(114) \qquad y(t) = e^{pt}[1 + q_r + q_r^2 + \ldots + q_r^N] = e^{pt}\sum_{k=0}^{N} q_r^k.$$

Ou, d'après (14), cette expression est équivalente à

$$(115) \qquad y(t) = e^{pt}\left[\frac{1 - q_r^{N+1}}{1 - q_r}\right].$$

La comparaison de ce résultat général avec l'équation analogue à celle-ci pour des signaux parasites dans la ligne à retard (67), révèle que l'effet des signaux résiduels est équivalent à l'effet des signaux parasites. Toutefois, il faut remarquer que les variables q et q_r ne sont pas tout à fait semblables [*voir* les équations (65) et (113)]. On traitera maintenant plusieurs cas particuliers afin de mieux faire comprendre cette différence.

5.2.2. Signification du résultat. — 5.2.2.1. *Cas de la bande latérale supérieure nulle.* — Pour montrer l'effet de l'opérateur R, on examinera (115) le cas où l'opérateur M est supprimé; posons donc $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, et la fréquence résiduelle $\omega_r = -\omega_m$. Dans ce cas, (63) donne

$$(116) \qquad q_r = e^{iu},$$

où

$$(117) \qquad u = -(\omega_m t + \omega_d T).$$

La substitution de (116) dans (115) donne la formule (72) qu'on a trouvée auparavant. Le système fonctionne donc correctement mais il faut noter que la définition de u [équ. (117)] est un peu modifiée. Le maximum des impulsions est maintenant donné par

$$\tau = -\frac{\omega_d T}{\omega_m}.$$

D'après la figure 50, on voit que cela signifie que l'impulsion R est située à gauche de l'origine ($t = 0$). En choisissant une autre variable, définie à partir de $-T$ (comme origine), on trouve

$$\tau_R = \left(1 - \frac{\omega_d}{\omega_m}\right) T.$$

Rappelons que dans le système avec un opérateur M parfait, ce décalage était donné par

$$\tau_M = |\tau| = +\frac{\omega_d}{\omega_m} T.$$

ce qui est représenté par l'impulsion M dans la figure 50. Il est donc évident que l'effet de la bande latérale inférieure est de donner une impulsion R symétrique autour de $t = 0$ avec l'impulsion principale M. Ceci n'est vrai naturellement que si le niveau de la fréquence résiduelle est égal à celui du signal principal, ce qui n'est pas le cas. Néanmoins, nous avons considéré ce cas afin de démontrer l'effet de symétrie de la bande latérale inférieure.

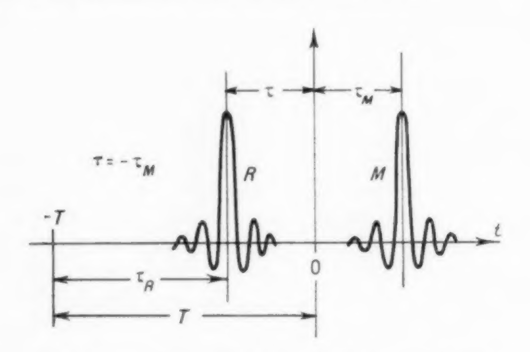


Fig. 50. — Deux impulsions M et R symétriques qu'on obtient avec $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et $\omega_r = -\omega_m$.

5.2.2.2. *Cas de la porteuse résiduelle nulle mais avec la présence de la bande latérale inférieure.* — On examinera maintenant le cas qui est le plus proche du cas actuel en considérant $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 < 1$, avec la fréquence résiduelle $\omega_r = -\omega_m$, ce qui correspond à la présence d'une bande latérale inférieure à faible niveau (et la porteuse résiduelle nulle).

Dans ces conditions, d'après (113), on a

$$q_r = e^{+iu}(1 + \beta_0 e^{-i2\omega_m t}) \tag{118}$$

et, pour le maximum des impulsions, on pose $u = \omega_m t - \omega_d T = 0$; donc (118) devient

$$q_r \Big|_{u=0} = 1 + \beta_0 e^{-i\xi}, \tag{119}$$

avec ξ défini comme avant par $2\omega_d T$. Il est donc clair que cette expression (119) est la même que celle qu'on a trouvée précédemment, (77). Notre conclusion est alors que l'effet sur le système d'un signal résiduel à la fréquence $\omega_r = -\omega_m$ (donc à la fréquence $\omega_i - \omega_m$) à la sortie d'un opérateur imparfait, est exactement semblable à l'effet d'un signal parasite au temps $3T$ dans la ligne à retard. Ainsi, le coefficient β_0 joue le même rôle que β considéré auparavant. Nous considérerons maintenant une généralisation de ce résultat.

5.2.2.3. *Relation générale entre les effets des signaux résiduels et des signaux parasites.* — On veut démontrer ici qu'il existe un rapport très simple entre les effets de signaux résiduels dans l'opérateur et des signaux parasites dans la ligne à retard. Cette démonstration s'effectue aisément à partir des formules générales de q et q_r [les équations (65) et (113)].

En posant $p = i(\omega_i + \omega_d)$ dans (65), et en supprimant les facteurs $R\,2\pi$ (R un entier), l'équation (65) devient

$$q = e^{i\omega_m t}(\alpha e^{-i\omega_d T} + \beta e^{-i\omega_d LT}). \tag{120}$$

Ensuite, puisqu'on s'intéresse seulement au cas des maximums des impulsions, on pose $\omega_m t = \omega_d T$. Avec cette condition, (120) peut s'écrire

$$q = \alpha + \beta e^{-i(L-1)\omega_d T}. \tag{121}$$

Suivant le même procédé avec la formule générale pour q_r [équ. (113)], on trouve

$$q_r = \alpha_0 + \beta_0 e^{-i(1-\lambda)\omega_d T}, \tag{122}$$

où λ est un entier, positif ou négatif, défini par $\lambda = \frac{\omega_r}{\omega_m}$ [équ. (112)].

La correspondance entre (121) et (122) est immédiate. Pour que les deux expressions soient égales, il faut que $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$, et

$$\lambda = 2 - L. \tag{123}$$

Il est donc clair que l'effet sur le système d'un signal résiduel, défini par $\lambda = -1$, ce qui correspond à la bande latérale inférieure, est exactement semblable à l'effet d'un signal parasite à $3T$ dans la ligne à retard ($L = 3$), comme on l'a déjà vu. Le cas $\lambda = 0$, ce qui correspond à un signal résiduel à la fréquence ω_i (porteuse), est évidemment équivalent à un signal parasite dans la ligne au temps $2T$, et ainsi de suite.

On a vu précédemment que le nombre d'ondulations périodiques $\mathfrak{N}$ dans la fonction de gain correspondant à l'intervalle de 0 à $\frac{1}{T}$, était égale à $L - 1$ (exemple : il y a deux ondulations pour $L = 3$, voir *fig.* 35). Le nombre d'ondulations relatives au facteur λ, est donc $\mathfrak{N} = |1 - \lambda|$. Les quatre ondulations obtenues expérimentalement pour la ligne C (*fig.* 35) indiquent que l'opérateur possédait des signaux résiduels dus à des distorsions qui donnaient naissance à des harmoniques impaires ($\lambda = -3$, $+5$), ou que la ligne possédait un signal parasite à $5T$ (ou $L = 5$). L'expérience a démontré

que les quatre ondulations obtenues étaient dues à l'opérateur et non pas à la ligne qui ne donnait pas de parasites à $5\ T$. Cependant, les deux ondulations obtenues avec la ligne Q, provenaient essentiellement du parasite à niveau élevé au temps $3\ T$.

Puisque l'amplitude des ondulations est donnée par $2\ \beta$ (pour $\alpha = 1$) le calcul de l'effet sur le système de la présence de signaux parasites ou résiduels est immédiat. On envisagera dans le dernier chapitre l'étude de plusieurs méthodes pour minimiser l'effet indésirable de ces signaux.

6. — PERFECTIONNEMENT DU SYSTÈME.

On considère en dernier lieu plusieurs méthodes pour perfectionner le fonctionnement du système. Notamment, on s'intéresse aux problèmes de la minimisation des signaux indésirables dans la boucle ainsi que des méthodes de stabilisation du gain et des fréquences dans le système. En conclusion, l'efficacité du système complet en boucle fermée sera examinée.

6.1. Minimisation de l'effet des signaux parasites et résiduels.

Dans le chapitre précédent, on a vu que la présence de signaux parasites dans la ligne à retard ou dans l'opérateur apporte une modulation périodique du gain de la boucle en fonction de la fréquence Doppler f_d. On considère ici trois méthodes différentes qui ont été conçues pour minimiser cet effet :

— une méthode de contre-modulation du gain;
— une méthode d'inversion de phase des parasites;
— une méthode d'addition d'un retard supplémentaire.

6.1.1. MÉTHODE DE CONTRE-MODULATION. — Puisque les signaux parasites produisent une modulation périodique du gain de la boucle, il suffit de faire varier le gain principal en sens inverse de l'effet des parasites. En effet, dans le chapitre 5, on a vu qu'il fallait que $\varepsilon = \beta\, e^{-i\xi}$ [équ. (101)], pour que l'effet du signal parasite β soit annulé. Rappelons que ε était défini comme une petite déviation de α de sa valeur unitaire $(1 - \alpha)$, et que $\xi = 2\omega_d\ T$, où ω_d est la fréquence Doppler et T la période du système. D'après (101), on a alors

$$\alpha = 1 - \beta\, e^{-i2\omega_d T}. \tag{124}$$

Cette expression était trouvée en posant $u = \omega_m t - \omega_d\ T = 0$ [équ. (71)], ce qui donnait le temps t auquel se produit l'impulsion. Puisqu'on veut rendre la fonction d'enveloppe linéaire, et puisque celle-ci est donnée pour la même condition $u = 0$, on peut remplacer $\omega_d T$ par $\omega_m t$ dans (124), ce qui donne

$$\alpha = 1 - \beta\, e^{-i2\omega_m t}. \tag{125}$$

Dans tous les cas pratiques, $\beta < 1$, donc (53) peut être approchée, avec peu d'erreur, par

$$\alpha = |\alpha|\, e^{i\theta} = (1 - \beta \cos 2\,\omega_m t)\, e^{i\beta \sin 2\omega_m t}. \tag{126}$$

On voit donc que pour annuler l'effet de β pour toutes valeurs de ω_d, il faut que le gain $|\alpha|$ soit modulé par la fonction $-\beta \cos 2\,\omega_m t$ (et la phase par $\beta \sin 2\,\omega_m t$), soit à une fréquence deux fois la fréquence ajoutée ω_m. Cette méthode a été essayée en laboratoire où l'on a utilisé le schéma représenté sur la figure 51. Bien entendu, la modulation a été

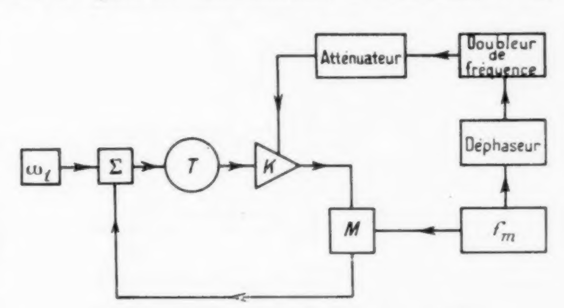


Fig. 51. — Schéma synoptique du système pour l'annulation du signal parasite à $3\ T$ avec la méthode de contre-modulation.

appliquée seulement au gain du système (et pas à la phase), car on recherchait un moyen simple pour l'annulation des signaux parasites. Le déphaseur et l'atténuateur étaient ajustés afin de satisfaire la condition $|\alpha| = -\beta \cos 2\,\omega_m t$.

Cette méthode, essayée avec la ligne Q (qui a un parasite à $3\ T$ de -32 dB), a diminué les variations par un facteur de 2,5. C'est-à-dire, au lieu de varier de 48 % (*fig.* 35) pour $0 \leq f_d \leq f_m$, l'amplitude de la 40e impulsion variait de 19 %. Ce résultat n'est pas parfait mais il démontre que la méthode est tout de même valable. Pour qu'elle soit plus satisfaisante, cette méthode devrait tenir compte de la modulation de phase nécessaire (126). Aussi, la forme exacte de la modulation d'amplitude due aux signaux parasites devrait être reproduite avec une phase inverse. Autrement dit, d'après (87), on voit

que plusieurs harmoniques de la fréquence $2\omega_m$ devraient être incluses dans la fonction de contre-modulation pour avoir une annulation parfaite.

Remarquons que cette méthode de contre-modulation peut annuler n'importe quel signal parasite. Il suffit pour cela d'appliquer une modulation d'amplitude aux fréquences correspondant à $(L - 1) f_m$, où LT est le retard du signal parasite. D'après la discussion du chapitre précédent (§ 5.2.2.3), il est clair que cette méthode est aussi efficace pour l'annulation de signaux résiduels dans l'opérateur.

6.1.2. Méthode d'inversion périodique de phase. — Le principe du deuxième procédé pour l'annulation des parasites consiste à ajouter et soustraire alternativement les signaux parasites de manière à empêcher ainsi toute possibilité d'une accumulation de ceux-ci. Cependant, cette méthode n'est valable que pour un seul signal parasite dans la ligne ayant un retard LT. Dans un but de simplicité, nous décrirons cette méthode pour le cas particulier, $L = 3$.

On a vu, dans le chapitre 5, qu'à l'époque $t = \tau = \frac{\omega_d T}{\omega_m}$, il y a une accumulation de toutes les ondes principales, car elles sont toutes en phase. A un autre instant, dans la période T, toutes les ondes parasites sont aussi en phase entre elles, et elles sont en phase ou en opposition de phase avec l'onde principale, suivant la fréquence f_d appliquée. C'est ce phénomène qui donnait une forme exponentielle, positive ou négative, à la fonction d'enveloppe des impulsions principales. Afin qu'il n'y ait pas une accumulation de ces signaux parasites, il suffit d'inverser leur phase relative au signal principal périodiquement sans toutefois affecter la phase relative des signaux constituants d'une impulsion dans la boucle principale. Le schéma synoptique indique comment cette méthode d'inversion est réalisée (*fig.* 52).

On a ajouté à l'ancien système deux déphaseurs qui effectuent une inversion de la phase H. F. du signal à leurs entrées suivant que leurs tensions de commande, définies par $g_1(t)$ et $g_2(t)$, sont positives ou négatives. Par définition, on suppose qu'une tension positive donne une phase zéro (pas de changement) et qu'une tension négative inverse la phase de π radians.

La fonction du déphaseur 2, qui est dans la boucle, est d'inverser la phase des signaux parasites. Cependant, en même temps, ce déphaseur inverse aussi la phase du signal principal. Cette dernière inversion est annulée par le déphaseur 1, qui est en dehors de la boucle, de telle sorte que le signal au point A (*fig.* 52) se trouve en phase avec le signal principal au point E. La fonction de commande $g_1(t)$ déphase le signal d'entrée e^{pt} périodiquement entre 0 et π toutes les $4\ T$ secondes. Cette idée est mise en évidence dans la figure 53 où la phase est indiquée en plusieurs points de la boucle en fonction du temps (chaque carreau représente une durée T). Ainsi, au point A, on voit que la phase est nulle pendant

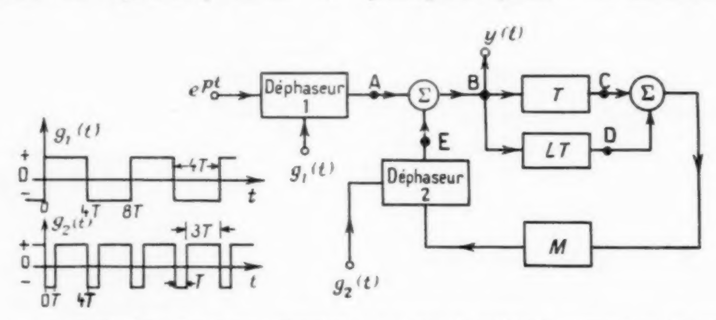
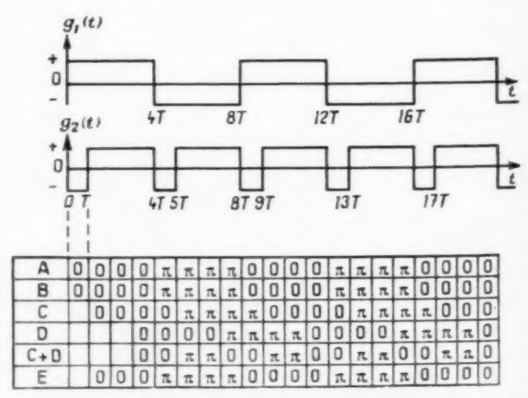


Fig. 52. — Annulation d'un signal parasite à $3\ T$ par la méthode d'inversion de phase.



A	0	0	0	0	π	π	π	π	0	0	0	0	π	π	π	π	0	0	0	0
B	0	0	0	0	π	π	π	π	0	0	0	0	π	π	π	π	0	0	0	0
C		0	0	0	0	π	π	π	π	0	0	0	0	π	π	π	π	0	0	0
D				0	0	0	0	π	π	π	π	0	0	0	0	π	π	π	π	0
C+D				0	0	π	π	0	0	π	π	0	0	π	π	0	0	π	π	0
E		0	0	0	π	π	π	π	0	0	0	0	π	π	π	π	0	0	0	0

Fig. 53. — Évolution de la phase en plusieurs points de la boucle obtenue par les fonctions de commandes $g_1(t)$ et $g_2(t)$.

les quatre premières périodes, π pour les quatre prochaines, et ainsi de suite, suivant la fonction de commande $g_1(t)$.

La phase au point B, en tenant compte seulement du signal au point A, suit la même loi. Au point C, on a toujours la même loi (toutes les 4 T secondes) mais décalée de T secondes après passage à travers la ligne T. Enfin, au point D, à cause du retard de la ligne LT, la loi de phase est décalée de 3 T secondes ($L = 3$). Ce dernier signal D, qui représente le signal parasite, s'ajoute deux fois consécutives puis se retranche deux fois consécutives, et ainsi de suite, du signal principal C, donnant ainsi la suite C + D (*fig.* 53). C'est cette commutation périodique qui interdit une accumulation des signaux parasites.

Ensuite, le signal principal C passe à travers le déphaseur 2 qui change la phase de ce signal suivant la loi de commande $g_2(t)$, donnant ainsi la suite représentée par E. En comparant B et E, on voit qu'il y a entre eux une correspondance de phase parfaite, et ainsi les signaux principaux s'ajoutent en phase comme dans le système sans modification.

Bien entendu, il faudrait changer les lois $g_1(t)$ et $g_2(t)$ pour annuler un signal parasite existant à un temps différent de $L = 3$. Cette méthode d'inversion de phase pour la minimisation des parasites n'a pas été vérifiée en laboratoire, car le premier procédé qui était néanmoins plus simple promettait plus de souplesse en offrant la possibilité d'annuler plusieurs parasites à la fois.

6.1.3. Méthode de l'addition d'un retard supplémentaire. — Une troisième méthode pour la suppression des signaux parasites consiste à faire apparaître ces signaux à des temps différents de ceux de l'impulsion principale en ajoutant un retard supplémentaire dans la boucle. L'efficacité d'une telle méthode est facilement comprise en considérant le signal dans la boucle comme une suite d'impulsions séparées d'un temps T, ce qui est actuellement le cas après plusieurs tours du signal dans la boucle.

Si le retard supplémentaire est de δ secondes, on voit qu'un signal ayant effectué trois tours complets dans la boucle aura subi un retard total de $3\,T + 3\,\delta$. Or, pendant ce temps-là, le signal parasite correspondant aura subi un retard $3\,T$ (pour $L = 3$) tout en restant dans la ligne à retard, et la durée totale d'un tour complet dans la boucle pour ce signal sera $3\,T + \delta$. Ainsi le signal parasite est décalé de $2\,\delta$ de l'impulsion principale et il ne réagit donc pas sur celle-ci. Cette situation revient à avoir un signal parasite avec un retard qui n'est pas un nombre entier de fois le retard principal, et ainsi il ne peut pas s'accumuler avec le signal, comme nous l'avons déjà constaté dans le chapitre 5.

Pour que cette méthode soit efficace, il faut que δ soit plus grand que la largeur d'impulsion et qu'il ne soit pas un sous-multiple de la période T. D'après l'expression donnant la largeur d'impulsion (*fig.* 10), la relation nécessaire est $\delta = \frac{2\,T}{N+1}\cdot$ Cette expression semble indiquer qu'il faudrait une ligne à retard supplémentaire avec un grand retard pour des faibles valeurs de N. Ceci serait bien le cas si l'effet des parasites se manifestait dès les premiers tours. Cependant, on a vu que les parasites ne deviennent pas gênants avant au moins une centaine de tours (pour une ligne à faible parasite). Ainsi, pour la ligne C, la ligne supplémentaire devrait avoir un retard de l'ordre de 17 μs (pour un $N \simeq 100$).

Le point faible de cette méthode est l'addition d'une deuxième ligne à retard au système, et de ce fait, la nécessité d'un plus grand gain dans les amplificateurs de la boucle pour compenser les pertes non négligeables de cette ligne additionnelle. Et un gain encore plus élevé dans les amplificateurs entraînerait des problèmes encore plus critiques pour la stabilité du gain.

6.2. **Amélioration de la stabilité.**

Une bonne stabilité du gain de la boucle, des fréquences dans le système, et du retard est primordiale pour obtenir, d'une façon régulière, le plus grand nombre de tours possible. On examinera donc plusieurs méthodes pour la stabilisation de ces paramètres. On considérera d'abord deux méthodes de contrôle automatique du gain; ensuite, on décrira la méthode conçue pour stabiliser à la fois la fréquence ajoutée et le retard de la ligne.

6.2.1. Stabilisation du gain. — Dans les chapitres précédents, on a vu qu'il suffit d'une très petite diminution du gain de boucle pour que l'amplitude des impulsions ne croîsse plus linéairement avec le temps. En effet, pour un gain $\alpha < 1$, on a constaté que l'amplitude tend vers une limite de saturation donnée par $A_s(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\cdot$ Ainsi, si l'on désire que cette limite soit au moins égale à 1 000, il faut maintenir le gain de boucle entre les limites de 0,999 et 1, soit la nécessité de réaliser une stabilité de 10^{-3}.

On propose deux méthodes pour la réalisation d'une meilleure stabilité; une dans laquelle un signal

supplémentaire est ajouté au système, et l'autre dans laquelle le signal qui sert pour établir les impulsions de référence est aussi utile pour l'asservissement du gain dans un système qui fonctionne en régime permanent sans découpage périodique de la boucle.

6.2.1.1. *Méthode avec signal supplémentaire pour le contrôle automatique du gain.* — Les modifications apportées au système pour la stabilisation du gain avec un signal additionnel sont mises en évidence dans la figure 54. On a ajouté au système simplifié les éléments suivants :

— un oscillateur donnant un signal à la fréquence $f_0 < f_i$, dont l'amplitude sert de référence pour le système de stabilisation;

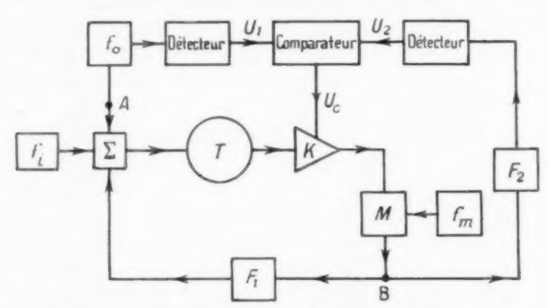


Fig. 54. — Système simplifié avec stabilisation de gain avec un signal additionnel.

— deux détecteurs qui transforment une onde sinusoïdale en une tension continue;

— un comparateur, de gain G, qui amplifie la différence des signaux continus d'entrée, ce qui donne à la sortie : $U_c = G(U_1 - U_2)$;

— deux filtres à bande passante étroite. Le filtre F_1 laisse passer les signaux aux fréquences $f_i + Nf_m$, et atténue le signal à la fréquence f_0, alors que F_2 effectue la fonction contraire.

Le fonctionnement de ce système est le suivant. Le signal f_0 est appliqué au système au moyen de l'additionneur au point A, et traverse ensuite la ligne T, l'amplificateur K, et l'opérateur M. Au point B, le signal est obligé de passer par F_2 car F_1 le bloque. Les tensions détectées U_1 et U_2 représentent donc les tensions au point A et au point B.

Ainsi une variation de gain de la boucle due à une variation de Σ, T, K ou M, se traduit par une variation de U_2. Le comparateur amplifie la différence entre U_1, la tension qui est restée constante, et U_2 qui a varié, et son signal de sortie U_c est appliqué au contrôle de gain de l'amplificateur K. Les polarités de U_1 et U_2 sont choisies de telle façon que U_c varie en sens contraire à la variation du gain de la boucle; autrement dit, si le gain de boucle diminue, U_2 diminue et ainsi U_c augmente afin de rétablir le gain de boucle à sa valeur unitaire. Bien entendu, le gain des détecteurs est fixé à une valeur telle qu'une variation de U_1 et de U_2 n'apporte aucune variation de U_c.

Ce système d'asservissement a été vérifié en laboratoire avec un comparateur ayant un gain $G = 60$. L'amélioration apportée à la stabilité du gain était de l'ordre de 10 en boucle ouverte, mais il fallait une tension d'entrée (au point A) beaucoup trop élevée (100 mV) pour que le système d'asservissement fonctionne. Ce fait aurait amené une saturation prématurée dans la boucle principale, ce qui aurait été évidemment indésirable. Néanmoins, ces premiers résultats ont démontré que la méthode était valable. Toutefois, il faudrait un niveau d'entrée beaucoup plus faible (de l'ordre du signal principal à l'entrée), ce qui nécessiterait des amplificateurs stabilisés par contre-réaction dans la chaîne d'asservissement. Cette méthode n'a pas été développée plus avant, car une meilleure méthode sans signal additionnel a été conçue.

6.2.1.2. *Méthode avec signal de boucle en régime permanent sans signal additionnel.* — En plus des inconvénients déjà remarqués dans le système d'asservissement décrit précédemment, la nécessité d'inclure des filtres en représente un autre. En effet, l'addition d'un signal supplémentaire à une fréquence différente de celle du signal principal nécessitait un aiguillage de chacun d'eux au moyen d'un filtre F_1 dans la boucle principale et d'un filtre F_2 dans la chaîne d'asservissement, ce qui produisait un affaiblissement supplémentaire des signaux. Tous ces inconvénients sont corrigés avec la nouvelle méthode représentée par le schéma de la figure 55.

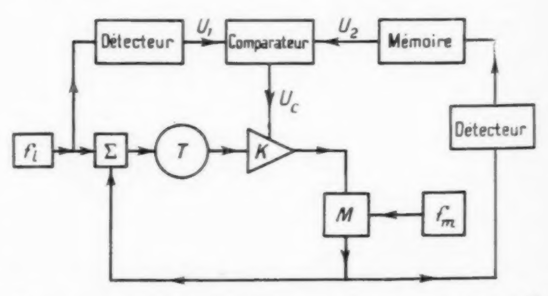


Fig. 55. — Système simplifié sans découpage de la boucle avec stabilisation du gain en utilisant le signal principal.

On voit que la grande différence entre cette méthode et la précédente est qu'il n'y a plus l'oscillateur f_0, et de ce fait, les filtres F_1 et F_2 ne sont plus nécessaires. Avant de décrire le fonctionnement de ce système d'asservissement, considérons d'abord la forme que prend le signal principal sans découpage périodique (NT) de la boucle (le séparateur S et le circuit porte P ont été supprimés; *fig.* 16). Puisque pour ce cas, la boucle est toujours fermée, le signal dans la boucle croîtrait indéfiniment (jusqu'à la saturation des amplificateurs) si le gain α était égal à 1. Ainsi, pour obtenir des impulsions d'amplitude stable et non saturée, il faut faire fonctionner le système avec un gain légèrement inférieur à 1. Pour cette condition, les impulsions atteignent le niveau donné par la formule $A_s(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$, valeur de saturation due à un gain inférieur à 1, et elles maintiennent ce niveau en régime permanent. La forme que prennent les impulsions pour ce régime permanent est représentée par la figure 56.

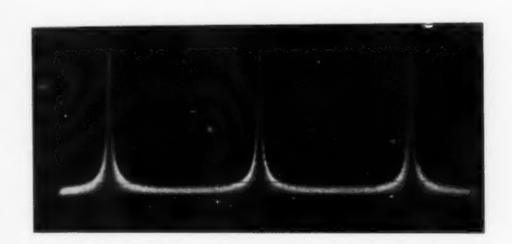


Fig. 56. — Impulsions dans la boucle en régime permanent pour $\alpha = 0,975$.

Comme dans le système avec découpage de la boucle, plus α est proche de 1, plus l'amplitude des impulsions est grande et plus la largeur de l'impulsion est réduite. Bien entendu, dans le cas du régime permanent, on ne peut plus parler de nombre de tours. Toutefois, on peut considérer les tours effectifs, donnés par $N_e = A_s(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}$ [équ. (32)], ou par la largeur de l'impulsion à mi-amplitude. Cette largeur, calculée à partir de (18) pour $\frac{E_N(u)}{N+1} = 0,5$, donne le nombre de tours effectif (pour $N > 100$) :

$$N_e \simeq \frac{1,2\,T}{\Delta},$$

où T est le retard de la ligne et Δ est la largeur de l'impulsion à mi-amplitude. A titre d'exemple, pour la ligne C (avec $T = 850\,\mu s$), cette formule se réduit à $N_e = \frac{1\,020}{\Delta}$, ce qui donne une façon simple d'évaluer N_e, car Δ est facilement mesurable.

Considérons maintenant le fonctionnement du système dans le cas de la méthode d'asservissement (*fig.* 55). Le comparateur a la même fonction qu'auparavant; c'est-à-dire que son signal de sortie est donné par $U_e = G(U_1 - U_2)$. Le signal de référence U_1 est obtenu maintenant de l'oscillateur f_i (point A), le même qui est utilisé pour former les impulsions de référence du temps (*fig.* 24). L'autre signal U_2 est obtenu à partir des impulsions qui existent au point B de la boucle. Le détecteur donne la valeur crête de ces impulsions et le circuit mémoire maintient cette valeur pendant environ 10 périodes T du système. Une variation de l'amplitude des impulsions due à un changement du gain de la boucle se fait ressentir dans U_2 (et non dans U_1) et ainsi dans U_e, qui corrige ensuite le gain K, comme dans le système décrit précédemment.

En laboratoire, cette méthode a apporté une amélioration de stabilité de l'ordre de 50 avec un comparateur ayant un gain de 60. Le réglage de toutes les tensions était toutefois délicat, car le système avait tendance à osciller. Cependant, une fois bien réglé, le gain était maintenu bien constant avec une constante de temps égale à 10 T (du circuit de mémoire). Cette méthode a permis de réaliser approximativement 400 tours ($N_e \simeq 400$), ce qui donnait des impulsions 10 fois plus étroites que celles représentées dans la figure 56, et nous approchons ainsi la valeur limite de tours imposée par la bande passante globale du système (*fig.* 29).

Cette méthode devrait être perfectionnée de deux manières : le réglage devrait être rendu moins critique, et la constante de temps du circuit mémoire devrait être réduite afin de pouvoir corriger les variations de gain instantanées (de période à période). Néanmoins, le but de ces études n'était pas de poursuivre l'étude complète d'un dispositif de stabilisation, mais de vérifier les différents principes d'asservissement proposés afin d'en déduire le meilleur.

6.2.2. Stabilisation des fréquences. — Les fréquences dans le système ainsi que le retard sont fonction de la température, comme nous l'avons constaté dans l'exposé précédent. Une méthode de stabilisation de ces paramètres consisterait donc à stabiliser la température des éléments en cause. Une autre méthode consisterait à annuler l'effet

de cette variation par un système d'asservissement. Nous considérons ici ces deux solutions.

6.2.2.1. *Oscillateur à quartz et ligne à retard thermostatés.* — Dans le chapitre 3, on a vu que la variation Δf_i de la fréquence f_i est inférieure à 25 Hz une fois que le système a atteint son équilibre thermique. En thermostatant l'oscillateur à quartz (f_i) à $\pm$ 0,5° C, la variation Δf_i serait de l'ordre de $\pm$ 3 périodes (d'après le coefficient de température donné dans la littérature : $\alpha_0 = 10^{-7}/°C$). Mais on a vu (§ 3.4.2.2) que ces variations sont très lentes (de l'ordre de la minute) relativement à la période T du système, et elles ne seraient donc pas gênantes pour le fonctionnement correct du système, puisque le signal à la fréquence f_i sert de référence pour la mesure du décalage τ et synchronise donc l'appareil de mesure par les impulsions produites par ce signal.

Les variations les plus importantes sont celles de la fréquence f_m et du retard T. On a vu qu'on maintient un fonctionnement correct si la condition $\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta f_m}{f_m}$, est respectée, ce qui signifie que Δf_m et ΔT ont le même effet sur le système. D'après l'expression (30), on voit que plus le nombre de tours est élevé, plus il faut que Δf_m et ΔT soient petits pour un $\frac{\Delta\tau}{T}$ donné. En utilisant le coefficient de température pour la ligne à retard $\left(\frac{\Delta T}{T} = -77.10^{-6}/°C\right.$, chap. $\left.4\right)$, et la formule (30), il est évident qu'il faudrait stabiliser la température de la ligne à $\pm$ 0,1° C près, afin de réaliser une erreur de position inférieure à $\pm$ 1 % $\left(\frac{\Delta\tau}{T}\right)$ pour 1 000 tours. On ne considère pas ces questions avec plus de détails, car dans le paragraphe suivant on propose une méthode qui permet d'éviter l'obligation de régulariser T et f_m.

6.2.2.2. *Contrôle automatique de la fréquence ajoutée f_m.* — D'après l'analyse du chapitre 2 (§ 2.2.1), on voit qu'il faut que le produit $f_m T$ soit égal à 1 pour le fonctionnement correct du système. La méthode d'asservissement décrite ici satisfait cette condition en rendant la fréquence f_m fonction du retard T. Ce système est représenté sur la figure 57. Les éléments de la boucle supplémentaire les plus importants sont :

— l'oscillateur bloqué qui fournit des impulsions vidéo périodiques de 1 μs de durée avec une période de répétition non synchronisée de $T_r > T$;

— l'oscillateur lancé H. F. qui donne des impulsions H. F. (à 25 MHz) à sa sortie seulement pendant la présence d'une impulsion à son entrée;

— l'oscillateur lancé B. F. qui transforme les impulsions périodiques (de période T) à son entrée en un signal sinusoïdal $\cos 2\pi f_m t$, où $f_m = \frac{1}{T}$.

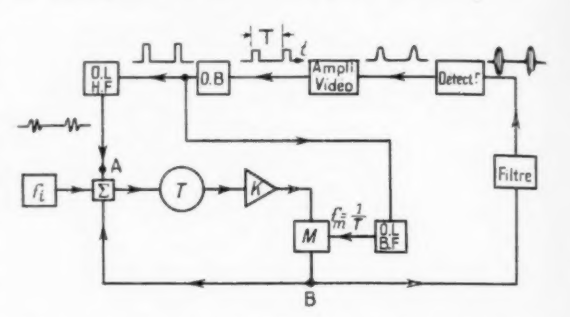


Fig. 57. — Système simplifié avec contrôle automatique de la fréquence f_m.

Le système fonctionne de la façon suivante. L'oscillateur bloqué H. F. produit une première impulsion vidéo, qui est transformée en impulsion H. F. par l'oscillateur lancé. Ce signal rentre dans la boucle principale au point A au moyen de l'additionneur. L'impulsion est ensuite retardée par la ligne à retard T et passe à travers K et M pour arriver au point B. L'impulsion refait alors un tour dans la boucle principale, mais à un niveau réduit car la fréquence de cette impulsion est décalée au-dessous de la bande passante principale. L'impulsion passe aussi dans l'autre boucle à travers le filtre, qui bloque les signaux principaux qui pourraient constituer des parasites gênants dans la boucle d'asservissement. L'impulsion est alors détectée, et amplifiée avant d'attaquer l'oscillateur bloqué. Ainsi, cette impulsion a fait un tour complet et elle déclenche une nouvelle impulsion dans l'oscillateur bloqué, qui continue le procédé cyclique. L'oscillateur lancé B. F. utilise ces impulsions pour former le signal $\cos 2\pi f_m t$ qui est ajouté à l'opérateur M de la boucle principale.

Il est évident que ce système maintient toujours un produit $f_m T$ constant et égal à 1, ce qui était le but recherché. En effet, si le retard T augmentait pour une raison quelconque, la fréquence f_m diminuerait, puisqu'elle est produite à partir de ce retard.

Les résultats expérimentaux confirment le fonctionnement décrit. Le système complet avec ce contrôle automatique de fréquence a parfaitement

fonctionné pour une variation de température de 30° C.

Ainsi, la dépendance du retard de la ligne sur la température n'est plus critique. Toutefois, il faut remarquer que cette méthode ne rend pas invariable la position τ de l'impulsion, mais pour les raisons notées précédemment, on a vu que ce déplacement lent est sans importance.

6.3. **Conclusions.**

Dans le développement de la méthode de transposition fréquence-temps, on a vu que l'efficacité du système est limitée par : la dispersion des caractéristiques de gain en fonction de la fréquence, la linéarité du système global, les signaux parasites dans la ligne à retard et l'opérateur, et les stabilités du gain, du retard et des fréquences utilisées dans le système.

Néanmoins, on a pu constater que les facteurs qui apportaient la limitation la plus importante étaient la présence de signaux parasites et les variations de gain et de fréquence.

On a proposé plusieurs méthodes pour la suppression des signaux parasites; toutefois, il serait plus simple de réduire leurs effets indésirables en utilisant une meilleure ligne à retard et un opérateur plus perfectionné avec un niveau de parasites plus faible. La meilleure ligne qu'on a essayée avait un signal parasite à 3 T, le plus gênant, à un niveau de 52 dB au-dessous de celui de l'impulsion principale à T (tableau 4.2). Or, il existe des lignes à retard avec un niveau résultant de la somme de tous les parasites, égal à — 60 dB.

Il est aussi possible de réaliser un opérateur (modulateur à bande latérale unique) ayant une réjection des signaux résiduels à mieux que 60 dB, en utilisant un procédé classique à double changement de fréquence en conjonction avec des filtres à quartz.

Ainsi, à titre d'exemple, avec 66 dB d'atténuation des parasites (dans la ligne ou l'opérateur), le système effectuerait 1 000 tours avant d'arriver à sa valeur de saturation [équ. (102)].

Afin de stabiliser le gain de boucle ainsi que la fréquence ajoutée f_m, il faudrait combiner les deux méthodes décrites précédemment (*fig.* 55 et 57). Avec un tel procédé, il serait possible d'effectuer aisément 200 tours stables en utilisant la ligne C, et passablement plus de tours (jusqu'à la limite de 500 tours, imposée par la bande passante globale) avec les meilleurs éléments décrits plus haut. Toutefois, il est à remarquer que cette combinaison des deux méthodes d'asservissement nécessiterait un filtrage supplémentaire ou un découpage dans le temps afin d'éviter les réactions d'un système d'asservissement sur l'autre.

Précédemment, on a vu que cette méthode de transposition fréquence-temps équivaut à un ensemble de filtres à bandes passantes contiguës. Le nombre de tours N effectués avec un accroissement linéaire des impulsions dans la boucle réalise ainsi la même fonction que $\frac{N}{2}$ filtres rectangulaires (*fig.* 1). Aussi on a vu qu'un tel système apporte une amélioration du rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ par un facteur N. Ainsi, pour 200 tours, cette méthode à boucle fermée serait équivalente à un système de 100 filtres, ce qui amènerait une amélioration de 23 dB du rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$. En vérité, puisque les impulsions obtenues dans le système ne sont pas rectangulaires, il serait plus correct de le comparer avec un ensemble de filtres réels. Il faut donc comparer la réponse d'un ensemble de filtres contigus (à un pôle), qui se recoupent aux points 3 dB et qui couvrent la bande de fréquence allant de 0 à f_m, avec celle du système à boucle. Dans ce dernier, on considère alors les différentes positions que peut prendre l'impulsion dans un balayage du temps de 0 à T, ce qui équivaut à une excursion de fréquence de 0 à f_m.

En prenant aussi la largeur d'impulsion définie par les points 3 dB, il est facile de démontrer que le système à boucle fermée pour 200 tours est équivalent à un ensemble de 230 filtres.

Dans la vérification expérimentale de la méthode décrite, on a utilisé des lignes ayant un retard de l'ordre de 1 ms. Ceci veut dire que le système expérimental était capable de mesurer des fréquences allant de 0 à 1 kHz avec une précision supérieure à 1 % pour 200 tours. Aussi, pour ce nombre de tours, les fréquences dans la boucle s'étendaient de f_i à f_i + 200 kHz (avec f_i aux environs de 30 MHz), ce qui nécessitait une bande passante uniforme sur 200 kHz. L'application de cette méthode de mesure à une plus grande excursion de fréquence serait réalisable en utilisant une ligne ayant un retard plus faible; toutefois, pour le même nombre de tours, ceci aurait nécessité un gain uniforme sur une plus grande plage de fréquence.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] D. L. Arenberg, *Measurements of Delay in Ultrasonic Systems* (*I. R. E. Nat. Conv. Rec.*, Part 2, March 1958, p. 121-133).

[2] M. Axelbank, *Ultrasonic-Delay-Line Terminating Circuits and Passband Measurements* (*I. R. E. Nat. Conv. Rec.*, Part 2, March 1958, p. 147-152).

[3] Ehrich et Steinberg, *Panoramic Spectrum Analysis in Real Time* (*I. R. E. Nat. Conv. Rec.*, Part 2, March 1959, p. 62).

[4] R. M. Fano, *Signal-to-Noise Ratio in Correlation Detectors* (*Res. Lab. of Electronics, M. I. T.*, Cambridge, Mass. Tech. Rep. No. 186, February 19, 1951).

[5] J. Freedman et J. Margolin, *Signal-to-Noise Improvement through Integration in a Delay-Line Filter System* (*Lincoln. Lab., M. I. T.*, Lexington, Mass., Tech. Rep. No. 22, May 13, 1953).

[6] S. F. George et A. S. Zamanakos, *Comb Filters for Pulsed Radar Use* (*Proc. Inst. Radio Engrs*, vol. 42, 1954, p. 1159).

[7] E. L. Kaplan, *Signal Detection Studies with Applications* (*Bell. Syst. Tech. J.*, vol. 34, 1955, p. 403).

[8] R. Kitai, *Coherent and Incoherent Integrators* (*Electronic and Radio Engineer*, vol. 34, 1957, p. 96).

[9] J. L. Lawson et G. E. Uhlenbeck, *Threshold Signals*, Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New-York, 1950, p. 46.

[10] J. A. Leavitt et J. J. G. Mc Cue, *The Measurement of Delay-Line Transducer Resistance* (*I. R. E. Nat. Conv. Rec.*, Part 2, March 1958, p. 143-146).

[11] Y. W. Lee, T. P. Cheatham et J. B. Wiesner, *Application of Correlation Analysis to the Detection of Periodic Signals in Noise* (*Proc. Inst. Radio Engrs*, vol. 38, October 1950, p. 1165-1171).

[12] D. A. Linden et B. D. Steinberg, *Synthesis of Delay-Line Networks* (*I. R. E. Trans. on Aeronautical and Navigational Electronics*, vol. ANE-4, March 1957, p. 34-39).

[13] A. G. J. Mac Farlane, *An Analysis of a type of Comb Filter* (*Proc. Instn. Elect. Engrs*, vol. 107, Part B, No. 31, January 1960, p. 39-52).

[14] J. E. May, *Precise Measurement of Time Delay* (*I. R. E. Nat. Conv. Rec.*, Part 2, March 1958, p. 134-144).

[15] A. H. Meitzler, *Temperature and Frequency Dependence of Insertion Loss in Delay Lines* (*I. R. E. Nat. Conv. Rec.*, Part 2, March 1958, p. 153-160).

[16] I. C. Miller et C. W. Sharek, *Designing Ultrasonic Delay Lines* (*Electronic Industries*, July 1958).

[17] K. S. Miller et R. I. Bernstein, *An Analysis of Coherent Integration and its Application to Signal Detection* (*I. R. E. Trans. on Information Theory*, vol. IT-3, December 1957, p. 237-248).

[18] D. E. Norgaard, *The Phase-Shift Method of Single-Sideband Signal Reception* (*Proc. Inst. Radio Engrs*, December 1956, p. 1718).

[19] S. O. Rice, *Mathematical Analysis of Random Noise* (*Bell. Syst. Tech. J.*, vol. 23, July 1944, p. 282 and vol. 24, January 1945, p. 46).

[20] J. Seras, *The Measurement of the Time Delay of Ultrasonic Delay Lines* (*J. Brit. Instn. Radio Engrs*, vol. 19, No. 4, April 1959, p. 237-244).

[21] R. A. Smith, *The Relative Advantages of Coherent and Incoherent Detectors : A Study of their Output Noise Spectra under various Conditions* (*Proc. Instn. Elect. Engrs*, vol. 98, Part IV, August 1951, p. 43).

[22] *Summary of Delay Line Principles : Military Systems Design*, Instruments Publishing Co. Inc., Pittsburgh, Penn., vol. 3, No. 5, September-October 1959).

[23] H. Urkowitz, *Analysis and Synthesis of Delay Line Periodic Filters* (*I. R. E. Trans. on Circuit Theory*, vol. CT-4, No. 2, June 1957).

[24] M. S. Zimmerman, *The Measurement of the Total Spurious Responses of an Ultrasonic Delay Line* (*I. R. E. Nat. Conv. Rec.*, Part 2, March 1958, p. 161-166).

[25] Zimmerman, Ehrich et Sunstein, *A Long Memory Delay Line Analog Recirculator* (*I. R. E. Nat. Conv. Rec.*, Part 2, March 1959).

ARTICLES PUBLIÉS PAR LES COLLABORATEURS DU GROUPE AU COURS DE L'ANNÉE 1960 EN DEHORS DES ANNALES DE RADIOÉLECTRICITÉ

La détection des fuites et l'analyse de mélanges gazeux au moyen du spectromètre de masse à résonance d'ions du type Omégatron, par R. J. Warnecke Jr, *Advances in Vacuum Science and Technology*, vol. 1, p. 251 (Proceedings of the First International Congress on Vacuum Techniques, 10-13 juin 1958, Namur, Belgique).

Après avoir rappelé brièvement le principe de l'Omégatron, l'auteur expose les possibilités de ce spectromètre utilisé, soit comme détecteur de fuites, soit comme analyseur de masses. Il décrit rapidement un détecteur de fuites du type Omégatron qui se distingue des autres appareils existant actuellement par le fait qu'il permet l'utilisation de plusieurs gaz d'épreuve, en particulier l'argon, puis il donne des résultats expérimentaux qui montrent que la sensibilité de l'Omégatron est comparable à celle des spectromètres classiques à champs constants. Il montre enfin que l'Omégatron est un spectromètre bien adapté à l'analyse de mélanges gazeux contenant des constituants légers tels que H, He, O, O_2, Co, Co_2, N_2, ... Sa sensibilité est telle que des pressions partielles de 10 Torr sont mesurables.

La pompe à titane comme dispositif d'entretien du vide dans des tubes électroniques, par H. Huber et Monique Warnecke, *Advances in Vacuum Science and Technology*, vol. 1, p. 457 (Proceedings of the First International Congress on Vacuum Techniques, 10-13 juin 1958, Namur, Belgique).

Les auteurs décrivent une nouvelle forme de pompe à gettérisation et à ionisation, pompe qui se présente sous forme d'une tétrode ou d'une triode dont l'électrode positive est une grille constituée essentiellement de titane. Cette grille étant chauffée par bombardement électronique, le titane s'évapore et se dépose sur une paroi refroidie par eau; cette paroi est portée à un potentiel négatif, elle sert de collecteur d'ions. Les auteurs indiquent les performances de trois modèles de pompes et montrent des exemples de leur application comme dispositifs d'entretien du vide dans des tubes hyperfréquences à grande puissance.

Experimental study of an Omegatron type mass spectrometer (*Étude expérimentale d'un spectromètre de masse du type Omégatron*), par D. Charles et R.-J. Warnecke Jr (Sixth National Symposium on Vacuum Technology Transactions, Philadelphie, 1959).

Les auteurs décrivent un spectromètre de masse du type Omégatron, développé par la Compagnie générale de télégraphie Sans Fil. Cet appareil dont le principe a été décrit par Sommer, Thomas et Ripple, présente une analogie considérable avec le cyclotron. Il est conçu, d'une part pour l'analyse de gaz de faibles pressions (P inférieur à 10^{-5} Torr), d'autre part pour la détection de fuites dans des enceintes capables de maintenir un vide élevé, les tubes électroniques en particulier.

Compensation des variations des caractéristiques de montages à transistors en fonction de la température, par J.-C. Bonnaire (*Électronique*, n° 157, p. 25-29).

La compensation par thermistance dans les montages à transistors consiste à remplacer la résistance de polarisation par un dipôle « thermistance-résistance en parallèle » qui est le dipôle compensateur. L'auteur donne des considérations pratiques pour le calcul et l'établissement d'un dipôle et décrit le montage de compensation. Il termine par un exemple pratique.

Les phénomènes gyromagnétiques et leurs applications en électronique, par L. Thourel (*Électronique*, n° 157, p. 20-24; n° 158, p. 19-24 et n° 159, p. 25-30).

Après un rappel des propriétés magnétiques des corps et de la théorie élémentaire des effets gyromagnétiques et de la résonance gyromagnétique, l'auteur étudie les propriétés de ferrites et leurs applications en hyperfréquence. Il passe ensuite en revue les différents types de masers et les amplificateurs ferromagnétiques et termine par une description sommaire de l'atomichron.

Un équipement pour faisceaux hertziens transhorizon dans la bande des 170 MHz, par R. BAYOT et A. FOREST (*Onde Électrique*, janvier 1960, p. 65-73).

Les auteurs décrivent un faisceau hertzien pour la transmission de 36 voies téléphoniques maximales, par diffusion troposphérique. Le faisceau utilise un modulateur de phase avec désaccentuation. La gamme de fréquence est de 148 à 174 MHz. L'émetteur a une puissance de 1 kW obtenue par un seul tube tétrode final. Deux récepteurs sont utilisés en diversité double par combinaison des courants porteurs. Outre les caractéristiques générales et les performances de ce matériel, les auteurs donnent une description des aériens, filtres et servitudes d'exploitation.

Un équipement prototype de faisceau hertzien transhorizon dans la bande des 2 000 MHz, par G. BROUSSAUD et L. MALNAR, écrit en collaboration avec F. DU CASTEL et R. BAUD (*Onde Électrique*, janvier 1960, p. 82-99).

Les auteurs présentent la réalisation d'un prototype d'équipement pour faisceau hertzien dans la bande des 2 000 MHz. Les caractéristiques principales de l'équipement sont : puissance 10 kW, antennes paraboliques de 12 m de diamètre, diversité en fréquence, 36 voies téléphoniques, modulation de fréquence. Après une présentation générale des critères qui ont conduit au choix de ces caractéristiques (présentation par F. DU CASTEL) les aspects les plus importants du matériel réalisé sont examinés et notamment certaines réalisations intéressantes en guides d'onde (1re partie par G. BROUSSAUD et L. MALNAR); on étudie enfin la réalisation de l'amplificateur de puissance (2e partie par R. BAUD).

Action of a progressive disturbance on a guided electromagnetic wave (*Action d'une perturbation progressive sur une onde électromagnétique guidée*), par J.-C. SIMON (*I. R. E. Trans. Microwave Theory and Techn.*, vol. MTT 8, n° 1, p. 18-29).

De très nombreux problèmes de physique relèvent de l'interaction de modes vibratoires, par exemple, l'action d'une perturbation progressive sur une onde électromagnétique. « L'amplification paramétrique » en onde progressive en est une application particulière.

Il est possible de trouver dans un guide électromagnétique des solutions de l'équation de propagation dans le milieu perturbé en employant la méthode dite des perturbations. Les conditions aux limites de raccord avec le milieu permettent d'obtenir la solution de façon unique. Les cas particulièrement intéressants sont obtenus dans le cas où sont satisfaites les relations d'interférence du premier ordre, dite de Bragg (égalités des vitesses de phase).

Sur une pompe miniature à titane, par Monique WARNECKE et P.-C. MOUTON (*Le Vide*, 1960, n° 85, p. 41-51).

Après avoir rappelé la structure d'une pompe à titane miniature et ses caractéristiques électriques, les auteurs décrivent les mesures effectuées avec un tel modèle de pompe, ainsi que son application au pompage des tubes hyperfréquence miniatures.

Sur la soudure par argon-arc dans la technique de tubes électroniques, par M. CHOPINET et DUMON (*Le Vide*, n° 85, p. 63-80).

Discussion des avantages et des limites de la soudure par argon-arc pour la fabrication des tubes électroniques. La source de chaleur concentrée, la vitesse de soudure et l'absence d'agents de contamination constituent des avantages, mais le procédé présente des limitations, particulièrement en ce qui concerne les métaux actifs et réfractaires. Discussion des défauts métallurgiques qui peuvent se produire et des propriétés de soudure de quelques métaux et alliages couramment utilisés.

Les dispositifs à ferrites hyperfréquence et leur industrialisation, par J. HACHETTE et J. VISTE (*Onde Électrique*, février 1960, p. 143-149).

Étude de dispersion des caractéristiques d'isolateurs en grande série montrant leur disposition par rapport aux limites des tolérances (une corrélation existe entre les deux caractéristiques observées), et indiquant l'importance des marges à prendre entre développement et fabrication de série.

L'intérêt de la structure « base diffusée », par O. GARRETA (*Onde Électrique*, février 1960, p. 161-163).

L'auteur indique d'abord comment, lorsqu'on cherche à augmenter au maximum la fréquence d'oscillation d'un transistor ou son produit gain-largeur de bande, on est amené à envisager une structure du type transistor à base diffusée.

Il expose ensuite la méthode du choix des éléments de la structure et de la technique de réalisation.

Il donne enfin les caractéristiques des transistors « base diffusée » réalisés par C. S. F., ainsi que les progrès espérés.

Circuits imprimés, par L. DELFOSSE (*Onde Électrique*, février 1960, p. 183-200).

L'auteur, s'adressant aux non-spécialistes, décrit les caractères particuliers à cette technique. Il cite les propriétés principales des circuits imprimés à réaliser pour aboutir à la soudure des circuits imprimés.

Il passe en revue les procédés spéciaux de réalisations (circuits imprimés par addition, circuits imprimés pour hautes températures) et termine l'exposé en mentionnant les applications possibles en vue d'exploiter, au mieux, les techniques décrites dans l'article.

Microwave television mobile relay for outside broadcasting (*Relais mobile de télévision hyperfréquence pour les émissions extérieures*), par J. POLONSKY (*J. Brit. Inst. Radio Engrs*, février 1960, p. 91-102).

Étude des principales qualités exigées par les relais de télévision, en particulier en ce qui concerne la transmission de l'image et du son sans dégradation de la qualité, la stabilité dans le temps des performances techniques et la facilité de fonctionnement (transport, installation, contrôle et maintenance). Discussion des principales causes de distorsion introduites dans la transmission par le relais et étude des problèmes de diaphonie entre les voies image et son et de la transmission d'un programme de télévision en couleurs. Description du matériel fonctionnant dans la bande 6 400-6 900 MHz.

Étude d'une colonne de plasma alimentée en continu et soumise à un champ électromagnétique : condition d'existence de solutions maxwelliennes non centrées; équation aux densités, par J.-M. DOLIQUE (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 1221-1222).

Description du comportement d'une colonne cylindrique de plasma binaire, complètement ionisé et soumise à l'action de champs extérieurs appliqués, constants et axiaux. Dans cette première Note, l'auteur établit les équations aux densités : n_e (électronique) et n_i (ionique); il utilise pour cela les équations de Fokker-Planck auxquelles il cherche des solutions maxwelliennes non centrées.

Étude d'une colonne de plasma alimentée en continu et soumise à un champ magnétique : approximation du premier ordre par rapport aux vitesses de diffusion; mise en évidence d'une zone frontière, par J.-M. DOLIQUE (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 1458-1459).

Dans cette Note, qui fait suite à la précédente, l'auteur développe une approximation au premier ordre en V, vitesse de diffusion.

Résistances de très haute valeur, par R. MICLO et J. TSOSCA (*Onde Électrique*, mars 1960, p. 249-251).

Les résistances THV à couche de carbone 10^7 à 10^{15} Ω) montées dans des tubes de verre vidés et scellés sont principalement utilisées pour la mesure de très faibles courants.

Les auteurs étudient d'abord la constitution de ces résistances, puis leurs caractéristiques électriques et terminent par les applications de ce matériel :

— Mesure de très faibles courants (chambres d'ionisation);

— Mesure des isolements;

— Étalonnage d'appareils de mesure, etc.

Les thermistances réfractaires, par J. VERGNOLLE et J. TSOSCA (*Onde Électrique*, mars 1960, p. 252-254).

Les thermistances réfractaires permettant la mesure et le contrôle des températures jusqu'à 1100° C n'avaient trouvé jusqu'à présent que des débouchés assez limités, à cause du prix relativement élevé de ce matériel.

La mise au point d'un nouveau type de thermistance réfractaire de « grande diffusion » fabriqué en série a permis leur utilisation dans des domaines jusque-là inaccessibles, principalement dans l'appareillage électroménager.

Après un rappel de notions générales, les auteurs décrivent ce nouveau modèle et analysent ses principales applications :

1° Thermométrie et régulation de température;

2° Limitation d'échauffement (radiateurs à accumulation, plaques chauffantes, fours électriques, étuves, etc.);

3° Temporisation de relais;

4° Dispositifs d'alarme (détection d'incendie, etc.).

Étude d'une enceinte à régulation électronique de température, par J.-C. BONNAIRE (*Électronique*, 15 mars 1960, p. 23-25).

Calcul des pertes par convection et par rayonnement qui se produisent dans une enceinte fermée. Étude de l'échauffement de cette enceinte et considération d'un exemple pratique. Discussion de l'utilisation d'une thermistance pour la régulation de la température de l'enceinte.

Pompage des tubes sur un bâti à double pompage, par R. ROCHEROLLES (*Le Vide*, n° 86, mars-avril 1960, p. 112-119).

L'auteur décrit un bâti de pompage permettant d'étuver à 800° C sous vide et capable d'atteindre des pressions de l'ordre de 10^{-10} mm Hg. Il étudie d'abord la partie étuve à haute température, puis le dispositif de pompage avec l'étuve de la cristallerie. Il décrit ensuite le dispositif de sécurité nécessaire lorsque la durée de pompage est de plusieurs jours. Enfin, il termine par les améliorations apportées aux nouveaux bâtis.

Le nouveau Service radiotéléphonique mobile maritime utilisé par la S. N. C. F., par P. Laurent (*Onde Électrique*, avril 1960, p. 332-336).

L'ouverture du Service mobile maritime radiotéléphonique international dont les caractéristiques techniques essentielles et les voies de trafic ont été définies à La Haye en 1957, a conduit la S. N. C. F. à équiper ses bâtiments affectés aux transports des voyageurs et des marchandises sur la Manche d'un matériel conforme aux normes internationales. Il s'agit d'un radiotéléphone sur ondes métriques utilisant la modulation de phase et fonctionnant sur 28 canaux (matériel C. S. F. type MF 921 M). Cet appareil apporte une solution relativement simple au problème complexe posé par le nombre des voies de trafic et leurs divers modes d'exploitation (alternat, duplex et semi-duplex).

Mise en évidence de propriétés ferroélectriques dans l'acide désoxyribonucléique (DNA), par J. Polonsky, en collaboration avec P. Douzon et C. Sadrou (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 3414-3416).

Les auteurs ont mis en évidence expérimentalement que le DNA, sous forme solide de désoxyribonucléate de sodium, manifeste des propriétés analogues à celles connues dans des corps ferroélectriques, comme par exemple le titanate de baryum ($TiBaO_3$).

L'électronique et la biologie cellulaire, par J. Polonsky (*Courants*, avril-mai 1960, p. 4-10).

Après avoir rappelé les contradictions dont souffre actuellement la biologie théorique, l'auteur montre la nécessité d'établir un pont entre la biologie et la biophysique. Il donne une hypothèse concernant le mode de fonctionnement des acides nucléiques et discute les aspects cybernétique, quantique et électromagnétique de la cellule vivante.

Les thermistances et leurs applications dans l'industrie, par J. Ganovelli (*L'Usine Nouvelle*, mai 1960, p. 163-180).

Après avoir présenté les différents types de thermistances existants (thermistances de la classe normale et de la classe réfractaire), l'auteur décrit les différentes phases de fabrication des thermistances. Il donne ensuite leurs caractéristiques statiques et dynamiques (loi de variation de la résistance en fonction de la température, capacité calorifique, constante de dissipation thermique, constante de temps thermique, stabilité-température maximale d'utilisation, teneur en haute fréquence) ainsi que les caractéristiques des circuits comprenant des thermistances. Il termine enfin par quelques problèmes d'utilisation.

Sequential receivers for french color TV System (*Récepteurs séquentiels pour le système français de télévision en couleurs*), par R. Chaste, P. Cassagne et N. Colas (*Electronics*, 6 mai 1960, p. 57-60).

Description des travaux effectués par la Compagnie Française de Télévision; système de télévision en couleurs Henri de France. Présentation du principe de la transmission séquentielle de la chrominance et description des divers éléments constituants du récepteur.

Méthodes de recouvrement de cathodes à oxydes par centrifugation, par H. Huber et J.-P. Freytag (*Le Vide*, 1960, n° 87, p. 234-250).

Description d'une méthode de recouvrement de cathodes à oxydes, basée sur la formation d'un dépôt par sédimentation à la centrifugeuse. Cette méthode permet d'obtenir une couche émissive plane avec une surface bien lisse et une épaisseur bien reproductible d'une cathode à l'autre.

Les thermoéléments à semi-conducteurs et leurs applications, par N. Thien Chi et J. Vergnolle (*Onde Électrique*, juin 1960, p. 450-465).

Après avoir rappelé les lois de la thermoélectricité, les auteurs donnent quelques aperçus sur les théories modernes concernant les propriétés thermoélectriques des semi-conducteurs nettement supérieurs aux métaux.

Suit une étude détaillée du thermocouple, générateur de courant (effet Seebeck) ou élément chauffant ou réfrigérant (effet Peltier); le parallèle est fait entre la théorie et les performances pratiques.

L'exposé se termine par la description des Laboratoires C. S. F.

Les thermopiles et leurs applications, par N. Thien Chi et J. Vergnolle (*Ingénieurs et techniciens*, juin 1960, p. 13).

Après avoir rappelé quelques notions de thermoélectricité, en ce qui concerne l'effet Seebeck, l'effet Peltier et l'effet Thomson, les auteurs effectuent une étude générale du thermocouple en régime permanent. Ils étudient ensuite les paramètres thermoélectriques de couples réels et montrent comment ces couples sont associés entre eux pour former des thermopiles. Ils terminent enfin en décrivant quelques réalisations de la C. S. F.

Le rôle des télécommunications dans la recherche scientifique, par M. Ponte (*J. U. I. T.*, juin 1960, p. 124-130).

L'auteur montre dans l'ensemble des progrès des télécommunications, l'influence de la recherche en

dégageant non seulement l'apport de celle-ci aux télécommunications, mais aussi ce qui a débordé de leur cadre initial et notamment le cas de la technologie des appareils et du comportement de l'humanité elle-même devant l'abondance des moyens ainsi créés.

Électronique et industrie, par R. AUBERT (*La Machine moderne*, juillet 1960, p. 8-16).

L'auteur passe en revue les utilisations de l'électronique dans l'industrie. Il considère, d'une part, celles qui sont liées spécifiquement aux phénomènes électroniques eux-mêmes, à leur nature intime (chauffage à haute fréquence, chauffage par pertes diélectriques, utilisation des phénomènes de propagation); d'autre part, celles dans lesquelles l'électronique n'est utilisée que comme intermédiaire.

Cette seconde catégorie d'applications se révèle plus riche que la première en raison de la grande diversité des traducteurs qu'il est possible de réaliser. L'auteur décrit sommairement ces différents types de traducteurs : traducteurs mécaniques, traducteurs de force et de pression, traducteurs lumineux, traducteurs de températures.

Il rappelle ensuite les possibilités offertes par les radiocommunications dans de nombreux cas en tant qu'aides auditives et aides visuelles, puis termine par les applications des régulateurs et des systèmes asservis.

Effet de redressement dans des décharges gazeuses à champs magnétique et électrique croisés, par G. BOUCHER et O. DOEHLER (*C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 59-61).

Les auteurs étudient l'effet de polarité constaté aux pressions de l'ordre de 1 à 10^{-5} Torr, par Penning, Hoefer et Redheard dans l'étude de l'influence d'un champ magnétique transversal sur les conditions d'amorçage d'une décharge gazeuse. Ils montrent que cet effet, appliqué au redressement des courants de basse fréquence peut être rendu plus efficace si le champ magnétique est localisé au voisinage de l'une des électrodes du tube redresseur.

La conversion thermoélectrique d'énergie, par P. AIGRAIN (*Bull. Soc. franç. Électr.*, juillet 1960, p. 441-447).

Après un rappel historique de la transformation de chaleur en électricité par effet thermoélectrique, l'auteur donne une théorie phénoménologique succincte de la conversion thermoélectrique d'énergie. Il indique ensuite la possibilité de réaliser des réfrigérateurs Peltier de faible puissance unitaire et termine par l'étude des rendements dans la conversion thermionique.

Fuites, en régime permanent, d'un plasma à deux températures, confiné par un champ magnétostatique, par J.-M. DOLIQUE (*C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 1163-1165).

Dans cette Note, l'auteur généralise le calcul des fuites dues à la diffusion des particules, perpendiculairement aux lignes de force magnétiques, dans une colonne de plasma confinée par un champ magnétostatique. Dans cette généralisation il suppose que les températures électronique et ionique sont différentes.

Procédé de scellement, céramique-titane, par A.-J. VELTE (*Le Vide*, juillet-août 1960, n° 88, p. 330-341).

Après avoir rappelé les raisons d'emploi des céramiques pour les parties isolantes des tubes à haute fréquence, l'auteur étudie les deux procédés de liaison céramique-métal : par métallisation préalable de la céramique et par utilisation de métal réactif tel que titane ou zirconium. Il décrit ensuite les travaux effectués à la C. S. F. pour le développement du procédé de brasage titane-céramique et discute ses avantages et ses inconvénients.

Stabilisation de la hauteur d'image par thermistances, par J.-C. BONNAIRE (*Télévision*, juillet-août 1960, p. 177-178).

Étude des différents types de montage utilisant des thermistances pour compenser les variations d'amplitude verticale de l'image en fonction de la température. L'auteur considère successivement les cas des blocs toroïdaux et des blocs en selle ou « cosinus ». Il présente les montages utilisant la haute tension de la base de temps ou la haute tension récupérée.

Sur les propriétés électriques du sel de sodium de l'acide désoxyribonucléique, par J. POLONSKY, en collaboration avec P. DOUZON, J.-C. FRANCQ et C. SADROU (*C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 976-978).

Les auteurs ont étudié l'effet de la teneur en eau des échantillons en expérience; ils montrent que les phénomènes d'hystérésis déjà signalés dans une précédente Note (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 3414-3416) semblent liés à la structure ordonnée des ensembles de macromolécules de DNA (forme A) telle qu'elle apparaît dans les diagrammes de rayons X.

Arbeitsweise und Vorteile des Farbfernsehverfahrens SECAM (*Principe et avantages du procédé de télévision en couleurs SECAM*), par R. CHASTE et P. CASSAGNE (*Elektronische Rundschau*, n° 9, 1960, p. 361, 362, 365 et 366).

Le procédé SECAM est entièrement compatible et se distingue d'autres procédés de télévision en couleurs

du fait que les signaux de chrominance sont alternativement transmis en bande étroite et seulement pour chaque deuxième ligne, tandis que le signal de luminance l'est en large bande, et pour toutes les lignes. Supposant l'œil incapable de distinguer, dans une image ainsi transmise, les fines variations de chrominance de deux lignes successives, on obtient pratiquement trois informations simultanées, bien que deux seulement soient transmises en réalité. L'article traite du principe et du fonctionnement de ce procédé de télévision en couleurs.

Étude des performances des amplificateurs du type maser à cavités couplées, par G. Broussaud et L. Malnar (*Onde Électrique*, septembre 1960, p. 555-572).

L'analyse des performances d'un amplificateur du type maser sur une ligne de transmission est traitée à partir de la propagation d'ondes de la forme exp $(-ikz + \alpha kz)$.

La première partie de cet article est consacrée à l'examen du maser à cavités multiples. Le calcul complet a été effectué pour 1, 2 et 3 cavités synchrones, symétriques ou en bout de ligne. Dans chaque cas le problème est examiné d'abord sous l'angle de la stabilité, puis de la largeur de bande qu'on peut obtenir dans les conditions les plus favorables. Des exemples précis sont donnés dans le cas d'un rubis utilisé en bande X.

Matériaux ferrites à très faible coefficient de température pour hautes fréquences, par R. Sibille (*Onde Électrique*, septembre 1960, p. 586-589).

L'auteur présente un nouveau groupe de matériaux « Ferrinox » H (ferrites de nickel-zinc) pour hautes fréquences qui vont être mis au point dans le cadre d'un marché d'études S. T. T. A.

La principale caractéristique de ces matériaux est une très grande stabilité en fonction de la température $\left(\frac{\Delta\mu}{\mu} \leq 0{,}02\ \%\ \text{par degré centigrade}\right)$ et cela dans un domaine très vaste allant de — 60 à + 250° C.

Amplificateurs paramétriques, par L. Thourel (*Électronique*, 15 octobre 1960, p. 23-28).

Après avoir donné le principe de l'amplificateur paramétrique, l'auteur étudie la nature de la réactance variable et le fonctionnement avec amplification directe. Il présente ensuite des montages d'amplificateurs à résistance négative et des montages d'amplificateurs up-converter, et donne enfin des performances de quelques amplificateurs.

Les apports C. S. F. dans le domaine de l'automatisme électronique, par H.-J. Uffler (*Onde Électrique*, octobre 1960, p. 747-750).

L'automatisme industriel fait progressivement appel à des techniques de plus en plus nombreuses et variées.

D'autre part, leur imbrication va également en croissant, et il devient pratiquement indispensable actuellement, pour mener à bien l'automatisation d'un ensemble industriel complexe, de disposer de la totalité des moyens de mise en œuvre de ces techniques et de conjuguer ceux-ci harmonieusement.

A cette fin, la Compagnie générale de télégraphie Sans Fil a mis sur pied une organisation spéciale dont les possibilités et l'activité sont rapidement passées en revue (régulation, commande logique, télécommande de puissance, télétransmission, traitement des informations, calcul).

Une nouvelle technique de régulation, par F. Garnier (*Onde Électrique*, octobre 1960, p. 751-761).

Les procédés classiques de régulation industrielle utilisant des boucles de réglages indépendantes montées en cascade ou non ne donnent de résultats satisfaisants que dans des cas relativement simples, à savoir lorsque les équations du système à régler sont pratiquement linéaires et indépendantes dans tout le domaine de fonctionnement du régulateur.

L'auteur montre comment la technique de régulation fonctionnelle permet, grâce au répartiteur d'erreurs, de réaliser des asservissements stables, précis et rapides, sur tout système physique régi par des équations différentielles implicites, non linéaires, d'ordre quelconque et en nombre quelconque sous réserve que ces équations admettent des dérivées finies dans tout le domaine de fonctionnement.

Il est important de noter que la régulation fonctionnelle donne d'excellents résultats, même lorsque les équations dynamiques du système sont mal connues et ne représentent que l'allure des phénomènes observés.

Les éléments constitutifs des régulations fonctionnelles sont ensuite rapidement décrits et la régulation d'une chaudière de centrale thermique est traitée en détail à titre d'exemple.

La technique de calcul « Analac », par E. Honoré et E. Torcheux (*Onde Électrique*, octobre 1960, p. 762-765).

La technique « Analac » est la nouvelle appellation d'une technique de calcul analogique qui a été développée par la Compagnie générale de télégraphie Sans Fil depuis plusieurs années, et qui a déjà donné

lieu à des réalisations de matériels extrêmement importants.

Cette technique se prête à de nombreuses applications notamment dans le domaine des calculateurs et de l'automatisme.

Cet article donne un bref aperçu des moyens techniques qu'elle utilise et de quelques-unes de leurs caractéristiques.

Henri de France colour television system (*Système de télévision en couleurs Henri de France*), par R. Chaste et P. Cassagne (*Proc. Inst. Electr. Engrs*, B, novembre 1960, p. 499-511).

Les auteurs décrivent les travaux effectués par la Compagnie Française de Télévision sur le système de télévision en couleurs Henri de France.

Après avoir montré les objectifs de l'équipe de recherches en ce qui concerne ces travaux, ils décrivent les caractéristiques principales de ce système, et en particulier les dispositifs de codage et de décodage. Finalement, ils donnent les résultats pratiques obtenus et indiquent les aspects théoriques de la facilité de transmission des signaux codés.

Étude expérimentale de la structure fréquentielle instantanée de la propagation en milieu hétérogène, par J. Biggi et J.-C. Simon, en collaboration avec F. du Castel, A. Spizzichino et J. Voge (*Ann. Téléc.*, novembre-décembre 1960, p. 274).

Un ensemble émetteur-récepteur équipé de carcinotrons, réalisé par la C. S. F., permet le balayage en 1/20e de seconde d'une bande de 200 MHz dans la gamme des 3 000 MHz. Installé sur une liaison de 300 km, cet équipement a permis une analyse rapide de la structure fréquentielle de la propagation troposphérique transhorizon : caractéristiques amplitude-fréquence et temps-fréquence, structure spectrale des fluctuations. Ces observations apportent des résultats sur la bande instantanée transmissible en propagation à travers le milieu irrégulier que représente la troposphère. En outre, une interprétation physique des caractéristiques spectrales des fluctuations en fréquence permet de relier celles-ci à la fonction de corrélation spatiale de la propagation et par là aux caractéristiques de la portion d'atmosphère intéressée par la propagation et au processus de la propagation lui-même.

Le calculateur universel « Analac » 101, par H. J. Uffler, E. Honoré et E. Torcheux (*Onde Électrique*, décembre 1960, p. 979-994).

L'Analac 101 est un calculateur analogique universel qui a été spécialement conçu pour pouvoir être utilisé par les non-spécialistes.

Des principes originaux lui confèrent des possibilités nouvelles et notamment l'introduction directe des équations dans la machine et leur résolution automatique.

L'article expose rapidement ces principes et donne un bref aperçu du matériel qui les concrétise.

ABRIDGMENTS.

AN OPTICAL PUMPING MAGNETOMETER FOR THE STUDY OF THE MAGNETIC FIELD OF SPACE

By L. Malnar and J. P. Mosnier. p. 3

1. Introduction.

Space research has initiated the development of a new class of magnetometer : sensitive, quick-acting, independent of the direction of the field, light and small. Apparatus using magnetic resonance meets these requirements. Resonance is made observable by the process of optical pumping. The magnetometer described in this article uses cæsium vapour.

2. Principle.

Optical pumping between states S and P of cæsium by means of a circularly polarised wave creates a large inequality of populations between the Zeeman components of the hyperfine structure of the fundamental S state.

Under these conditions it is possible to induce resonance transitions between the Zeeman sub-levels by means of a vibrating magnetic field.

The frequency which corresponds to these transitions is substantially a linear function of the static magnetic field in which the cæsium vapour is situated, and measurement of the latter amounts to a frequency measurement. Resonance is detected by the Dehmelt method. It makes use of the fact that passage to resonance is accompanied by a modification of the absorption coefficient of the pumping light, which can be detected by means of a photoelectric cell.

3. Practical method.

The pumping light is obtained from an electrode-less discharge tube excited by an alternating current of some 50 Mc/s.

This light is circularly polarised and is then focused onto a resonant cell containing cæsium vapour. The transmitted light is collected by a lens and is focused onto a photoelectric cell. The resonance transitions are produced by a vibrating field (about 160 kc/s in the earth's field) generated by coils fed from a frequency-modulated generator. The purpose of the frequency sweep is to sweep across the resonance line. There results a modulation of the transmission coefficient of the cell at the pumping frequency. This modulation is detected by the photoelectric cell and its phase with respect to the initial modulating signal gives the position of the mean generator frequency with respect to the centre of the resonance zone. A control system is then used to set this frequency in the middle of the line and so to follow any fluctuation of the field to be measured.

4. Performance.

A first laboratory model of the magnetometer was designed. Its performance was compared against a Gulf apparatus whose sensitivity is 1 γ for a time-constant of 0.3 s. Coincidence of the two records was observed to less than 1 γ.

Experiments are in hand to secure a further improvement on this performance; taking into consideration the various parameters which can be adjusted, the performance of the final prototype may be found to be as follows : sensitivity, 0.1 γ (10^{-6}); time-constant, 0.1 s.

INTRODUCTION TO THE THEORY OF PULSED INFORMATION SERVOCONTROLS

By S. Thelliez and J. P. Gouyet. p. 9

The value of a signal varying with time can be collected either continuously, or in pulses, depending on the means of detection employed. That information is then transmitted or used by means of control apparatus or systems which may function continuously or discontinuously.

Apparatus of the former type has long been in use but it is being rapidly displaced by that of the latter type. Both, continuous and sampled-data elements (such as digital computers) are now often seen in a given control system. Systems of the continuous type will undoubtedly develop more and more because of their following advantages :

— Easy construction and operation;

— High rate of transmission and utilisation of pulsed signals;

— Unlimited possibility of applying logical reasoning and decisions through the use of memories and high internal switching speed.

Some problems arise in the handling of the information and analysis of these new systems. The purpose of this article is to set out these problems and the new method developed for their study.

In part I the condition to be satisfied when submitting a continuous information to a sampling process without deterioration is examined, the sampling merely amounting to a change of form. The various possibilities and restrictions met with when effecting the reconstitution in continuous form of some previously sampled information are then set out. It becomes immediately evident that the methods of analysis for the study of continuous systems — in particular the Laplace transform and the Fourier series transform — are awkward in the case of discontinuous systems. So a method of a nalysis in a complex plane has been developed.

The study of the so-called Z transform which permits a change from the time to the complex domain occupies Part II of this article. The theoretical basis of this mathematical manipulation is dealt with in detail, together with its correspondence with the transforms regularly used for continuous systems. Z transformation with an applied delay (or " modified Z transform ") is also examined. This further method of analysis preserves in analytical form all the characteristics of a continuous output signal derived from sampled data introduced at the input. The Z transform permits the analysis only of systems receiving pulsed information and producing synchronously sampled data at the output.

The inverse transforms, with or without delay, of the two Z operations bring out an easy change from the complex analytical to the time domains, both as regards calculation and understanding of the transfer phenomenon. Transfer formulae are available but can be replaced by a limited development obtained by simple arithmetical division. It is found that the analytical expression in the complex plane of a sampled signal explicitly contains characteristics of the signal expressed in the time domain. The synthesis of sampled-data systems is thereby simplified, as compared to the synthesis of continuous systems in which the inverse Laplace transform is always tedious. However, the synthesis will not be dealt with in this article.

The absolute stability of a sampled-data system is then studied. Methods derived from those used for continuous systems are given such as the modified Rough test, the plot in either $G(p)$ or $G^*(p)$ complex plane of the pulsed transfer function, and the pulsed root locus in the Z plane.

The possibilities of Z transform, with or without delay, are demonstrated by means of five different examples. These varied examples show the flexibility provided by a Z transform, which renders the latter a powerful means of analysis, both for continuous and for pulsed systems.

FREQUENCY TO TIME TRANSPOSITION FOR THE MEASUREMENT OF AN UNKNOWN FREQUENCY

(PART II)

By R. H. Baumann. p. 69

The present investigation is a continuation of the delay line, Doppler frequency analyzer described in Part I of this article. A theoretical explanation for the anomalies of the system found experimentally (Part I) is exposed.

4.1. Generalities on fused-quartz delay lines.

A physical description of the operation of fused-quartz delay lines is briefly considered, and an equivalent electrical circuit is given.

4.2. Insertion loss and time delay variations.

Measurements of the insertion loss as a function of frequency and temperature are given. Also, the variation of time delay with frequency and temperature is included.

4.3. Delay line spurious signals.

Signals which appear at the output of a delay line at delay times other than the desired delay are called spurious signals. The spurious response of the two lines is given. The most deleterious spurious signal for the present system is the three-time-around signal (which occurs at $3T$) and it was found to be 32 dB under the desired signal (at T) in the worse line tested, and at — 52 dB in the best delay line used. A simple analysis achieved by considering ideal delay lines in parallel (but with different delays) reveals that an interaction occurs between the signals arriving at different times at the output of these delay lines. This interaction produces a periodic variation of the gain-frequency characteristics, which explains the observed phenomena (Part I).

5.1. Theoretical analysis of the non-ideal system with spurious signals in the delay line.

An analysis is effected which takes into account the presence of spurious signals in the delay line. This investigation is realized for the closed-loop system, and is generalized to include the case of a loop gain α less than 1. The investigation corroborates the brief analysis considered in paragraph 4.3 which was carried out on an open-loop basis. The modulation effects of spurious signals on the gain-frequency characteristics is revealed, and their effect on the linear accumulation of the impulse amplitudes is clearly brought out.

5. 2. Theoretical analysis of a system with an non-ideal modulator.

The same iterative method of calculation is applied to analyze the closed-loop system with a modulator which has residual signals at its output. The analysis reveals that an imperfect single-sideband modulator produces the same gain modulation effects as spurious signals in the delay line.

6. 1. Proposed improvements for the reduction of spurious signals.

Three methods for reducing the gain modulation effects of the spurious signals and modulator residual signals are given. The first of these is a method of counter-modulation of the gain variations. The loop gain is varied in phase opposition to the variations due to spurious signals. The second system effects the same function by a periodic phase inversion method. The last method proposed concerns the incorporation of an additional delay in the closed-loop system in order to force the circulating spurious signals, produced in the main delay line finally to become out phase, thereby reducing the possibility of spurious signal accumulation.

6. 2. Improvements of the stability.

Two methods for the stabilization of the loop gain are proposed. The first is realized by introducing a supplementary sinusoidal signal in the closed-loop and uses conventional automatic amplitude control circuitry. The other method stabilizes the gain by using the reference impulses already in the closed-loop. The latter of these methods yielded a fifty-fold improvement of the stability by using a difference amplifier with a gain of 60.

The frequencies were stabilized by using a quartz oscillator for the reference carrier source. The added frequency was stabilized by a feedback method in which the added frequency was produced by periodic impulses separated by the line delay. With these methods of stabilization applied to the system, 400 recirculations of the signal were obtained.

6. 3. Conclusions.

It is shown that the delay line, closed-loop, Doppler frequency analyzer is equivalent to a system with more than 440 bandpass contiguous filters when 400 recirculations are effected. However, for better dependability, the stability aspect of the system needs further study.

ZUSAMMENFASSUNGEN.

EIN MAGNETOMETER MIT OPTISCHER RESONANZ ZUR UNTERSUCHUNG DER FELDER IM WELTRAUM

Von L. Malnar und J. P. Mosnier. s. 3

1. Einleitung.

Die Weltraumforschung hat die Untersuchung einer neuen Klasse von Magnetometern angeregt, und zwar von empfindlichen, leichten, platzsparenden feldrichtungsunabhängigen Geräten mit grosser Ansprechgeschwindigkeit. Die Geräte, welche die magnetische Resonanz der Alkalimetalldämpfe verwenden, entsprechen diesen Forderungen. Diese Resonanz kann durch den optischen Pumpeffekt beobachtet werden. Das hier beschriebene Magnetometer verwendet Cäsium-Dampf.

2. Grundsätzliche Arbeitsweise.

Durch das optische Pumpen zwischen zwei Zuständen S und P des Cäsiums mit Hilfe einer zirkular polarisierten Welle kann man eine sehr unterschieldliche Belegung der Zeeman-Komponenten der Hyperfeinstruktur des Grundzustandes S bewirken.

Unter diesen Bedingungen ist es möglich, mit Hilfe eines magnetischen Wechselfedes Resonanzübergänge zwischen den Zeeman-Niveaus zu induzieren.

Die diesen Uebergängen entsprechende Frequenz ist wesentlich eine lineare Funktion des statischen Magnetfeldes, in welchem sich der Cäsium-Dampf befindet und die Messung dieses Feldes wird also auf die Messung einer Frequenz zurückgeführt Der Resonanzzustand wird durch das Verfahren von Dehmelt ermittelt. Dieses beruht auf der Tatsache, dass beim Durchfahren des Resonanzzustandes der Absorptionsgrad des Pumplichtes eine Änderung erfährt, die von einer Fotozelle erfasst werden kann.

3. Praktische Ausführung.

Das Pumplicht wird von einer elektrodenlosen Entladungsröhre erzeugt, welche von einem Wechselstrom mit einer Frequenz von etwa 50 MHz angeregt wird.

Dieses Licht wird zirkular polarisiert und dann durch eine Optik auf die Resonanzzelle, die den Cäsium-Dampf enthält, fokussiert. Die Resonanzübergänge werden durch ein Wechselfed bewirkt (mit einer Frequenz von etwa 160 kHz für das Magnetfeld der Erde), welches von Spulen erzeugt wird, die von einem frequenzmodulierten Generator mit Strom versorgt werden. Der Frequenzhub dient dazu, die Resonanzlinie zu erfassen. Es folgt daraus, dass der durchgelassene Lichtfluss, der auf die Fotozelle fällt, moduliert ist. Diese Modulation wird von der Fotozelle erfasst und ihre Phase in Bezug auf die des Generators ergibt die Lage der mittleren Frequenz des Generators in Bezug auf die Resonanzfrequenz. Durch eine automatische Steuerung wird die Generatorfrequenz automatisch auf die der Resonanzlinie abgeglichen, so dass sie allen Schwankungen des gemessenen Feldes automatisch folgt.

4. Leistungen.

Ein erstes Laborgerät ist bereits gebaut worden. Seine Leistungen sind mit denen eines Gulfgerätes, dessen Empfindlichkeit bei einer Zeitkonstante von $0,3\ s = 1\ \gamma$ beträgt, verglichen worden. Die beiden registrierten Werte sind mit einer Abweichung von weniger als $1\ \gamma$ in Uebereinstimmung.

Experimentelle Untersuchungen sind zur Zeit im Gange, um diese Leistungen noch zu verbessern; unter Berücksichtigung der Einflussgrössen, die man einstellen kann, wird das endgültige Erstmuster folgende Leistungen aufweisen : Empfindlichkeit, $0,1\ \gamma\ (10^{-6})$; Zeitkonstante, $0,1$ s.

EINFÜHRUNG ZUR THEORIE DER SERVOSTEUERUNGEN MIT IMPULSWEISE UEBERTRAGENEN INFORMATIONEN

Von S. Thelliez und J. P. Gouyet. s. 9

Eine zeitlich veränderliches Signal kann je nach den zu seiner Erfassung eingesetzten Mitteln entweder kontinuierlich oder impulsweise abgetastet und registriert werden. Diese Daten (oder Informationen) werden dann mit Hilfe von Ueberwachungs-und Kontrollgeräten oder-Anlagen übertragen oder ausgewertet, die entweder kontinuierlich oder absatzweise arbeiten.

Die Geräte der ersten Art (stetige Arbeitsweise) werden schon seit langen eingesetzt, werden aber mehr und mehr von denen der zweiten Art verdrängt. Man findet zur Zeit sehr oft in ein und derselben Regelanlage neben stetig arbeitenden Geräten auch sogenannte Digitalgeräte, wie die Digitalrechner. Die Entwicklung der Anlagen, die mit Digitalwerten arbeiten, wird sich in naher Zukunft immer mehr durchsetzen und zwar infolge der nachstehenden Vorteile :

— Einfacher Aufbau, einfache Bedienung;

— Hoher Uebertragungs- und Verwendungsgrad der Impulssignale;

— Unbegrenzte Möglichkeiten in bezug auf die Auswertung durch Rechnungen, Vergleiche, Schlussfolgerungen und Entscheidungen infolge des Einsatzes von Speicherelementen und Erreichung hoher Schaltgeschwindigkeiten.

Die Verarbeitung dieser Informationen und ihre Analyse stellen neuartige Probleme :

Dieser Aufsatz hat den Zweck diese Probleme und ein neuentwickeltes Verfahren für ihre Untersuchung auszulegen.

In einem ersten Teile werden die Vorbedingungen untersucht, welche man erfüllen muss, wenn man eine stetige Information durch eine Reihe von Digitalwerten ersetzen will (was eine Umformung oder Transformation darstellt) ohne den Inhalt der Information zu verändern. Man zeigt dann die verschiedenen Möglichkeiten und die Beschränkungen, auf welche man stösst, wenn man eine vorerst durch eine Reihe von Digitalwerten dargestellte Information wieder in stetiger Form darstellen will. Man bemerkt sofort, dass die Rechenverfahren, welche für die Untersuchung von stetigen Systemen entwickelt worden sind, wie z. B. die Laplace-Transformation oder die Transformation in eine Fourier'sche Reihe im Falle von diskontinuierlichen Systemen sehr schwerfällig werden. Ein neues Analyseverfahren in der komplexen Ebene ist besonders zu diesem Zwecke entwickelt worden.

Die Untersuchung dieser sogenannten Z-Transformation, mit deren Hilfe man von dem zeitlichen Bereich in den komplexen Bereich übergehen kann, wird im zweiten Teil des Aufsatzes ausgelegt. Es wird auf die theoretischen Grundlagen dieser mathematischen Verarbeitung eingegangen, sowie auf die Zusammenhänge mit den üblicherweise für stetige Systeme verwendeten Transformationen. Es wird ebenfalls die Z-Transformation mit Verzögerung untersucht. Durch dieses weitere Analyseverfahren ist es möglich alle charakteristischen Daten eines stetigen Ausgangssignales eines Systems, das am Eingang Digitalsignale erhält, ohne Verlust zu erhalten, Die Z-Transformation ermöglicht nur die Analyse von Systemen, die nur mit Digitalwerten arbeiten, mit synchron am Eingang und am Ausgang abgetasteten Werten.

Die umgekehrte Transformation mit oder ohne Verzögerung dieser Z-Transformierten zeigen, dass man sehr leicht von dem komplexen Bereich der Analyse auf den zeitlichen Bereich übergehen kann, sowohl in bezug auf die Rechenvorgänge als auf das Verständnis des Uebergangvorganges. Die Uebergangsformeln können abgeleitet werden; man kann sie aber durch eine begrenzte Reihenentwicklung ersetzen, die man durch einfache arithmetische Division erhält. Es zeigt sich, dass der analytische Ausdruck in der komplexen Ebene Z eines abgetasteten Signales, die in dem zeitlichen Bereich bestimmten Daten des Signales in expliziter Form enthält. Die Synthese der digital abgetasteten Systeme ist deshalb in bezug auf die Synthese der stetigen Systeme, wo die umgekehrte Transformation der Laplace-Transformierten immer schwerfällig ist, bedeutend vereinfacht. Diese Synthese wird aber in diesem Aufsatze nicht ausgelegt. Es wird dann das Problem der absoluten Stabilität eines durch Impulse betriebenen Systems untersucht.

Es folgt eine Beschreibung der verschiedenen Methoden, die für kontinuierliche Systemen abgeleitet worden sind, nämlich das veränderte Kriterium von Rough, das Zeichnen der pulsierten Übergangsfunktion in der komplexen Ebene $G(P)$ oder $G^*(P)$ und das Zeichnen des Wurzelortes in der komplexen Ebene Z.

Die Möglichkeiten der Z-Transformation mit und ohne Verzögerung werden an fünf verschiedenen Beispielen ausgelegt. Diese unterschiedlichen Beispiele zeigen die Vielseitigkeit der Untersuchung, welche durch die Z-Transformation gegeben wird, sodass diese ein höchst leistungsfähiges Mittel zur Analyse von stetigen oder digitalen Systemen darstellt.

UMWANDLUNG EINER FREQUENZ IN EINE ZEIT ZUR MESSUNG EINER UNBEKANNTEN FREQUENZ

(II.TEIL)

Von R. H. Baumann. s. 69

Diese Untersuchung ist die Fortsetzung der Arbeit über das Verzögerungsleitungs-Dopplerfrequenz-Messgerät, das im ersten Teil beschrieben worden ist. Sie gibt eine theoretische Erklärung des abnormalen Verhaltens der Vorrichtung während der Versuche (I.Teil).

4.1. **Allgemeines über die Verzögerungsleitungen aus geschmolzenem Quarz.**

Es wird eine kurze physikalische Beschreibung der Arbeitsweise der Verzögerungsleitungen aus geschmolzenem Quarz gegeben und es wird ein Ersatzschaltbild dafür geliefert.

4.2. **Einschleifverlust und Verzögerungsschwankungen.**

Es werden Messungen des Einschleifverlustes in Abhängigkeit der Frequenz und der Temperatur gegeben. Es wurden auch die Schwankungen der Verzögerung in Abhängigkeit der Frequenz und der Temperatur erfasst.

4.3. Zufällig verteilte Störsignale der Verzögerungsleitung.

Die Signale, die am Ausgang der Verzögerungsleitung nach einer anderen Verzögerungsdauer erscheinen als die gewünschte Verzögerung, sind zufällig verteilte Störsignale. Es werden die Störsignale der beiden Verzögerungsleitungen gegeben. Das unangenehmste Störsignal in der ausgeführten Vorrichtung besteht aus dem Reflexsignal, welches drei Mal die Verzögerungsleitung durchwandert (und nach 3 T erscheint). In der schlechtesten der geprüften Leitungen war dieses Signal 32 dB unter dem Pegel des Nutzsignals (bei T) und in der besten Leitung war es 52 dB unter diesem Pegel. Eine einfache Untersuchung einer Anordnung mit parallel geschalteten Verzögerungsleitungen (mit unterschiedlicher Verzögerung) zeigt, dass eine Wechselwirkung zwischen den Signalen, die an verschiedenen Zeiten am Ausgang dieser Verzögerungsleitungen erscheinen, stattfindet. Diese Wechselwirkung bewirkt eine periodische Änderung der Verstärkungs-Frequenz-Charakteristik, welche die beobachteten Vorgänge erklärt (I.Teil).

5.1. Theoretische Untersuchung einer nicht ideellen Vorrichtung mit zufällig verteilten Störsignalen in der Verzögerungsleitung.

Es wird eine Untersuchung unter Berücksichtigung der Anwesenheit der Störsignale in der Verzögerungsleitung unternommen. Diese Untersuchung wird für das System mit der geschlossenen Schleife vorgenommen und wird dann verallgemeinert für den Fall wo die Verstärkung der Schleife α kleiner ist als 1. Diese Untersuchung bestätigt die Untersuchungen des Paragraphen 4.3, welche auf Grund eines Systems mit offener Schleife ausgeführt worden war. Der Modulationseinfluss der zufällig verteilten Störsignale auf die Verstärkungsfrequenzkurve wird hier gezeigt und ihre Auswirkung auf die lineare Summierung der Impulsamplituden wird deutlich bewiesen.

5.2. Theoretische Analyse eines Systems mit einem nicht ideellen Modulator.

Dasselbe Iterationsverfahren wird dann für die Analyse des Systems mit geschlossener Schleife mit einem Modulator, welcher am Ausgang Restsignale aufweist, angewendet. Diese Untersuchung zeigt, dass ein unvollkommener Einseitenbandmodulator denselben Einfluss auf die Modulation der Verstärkung ausübt, wie zufällig verteilte Störsignale in der Verzögerungsleitung.

6.1. Vorgeschlagene Verbesserungen zur Unterdrückung der Störsignale.

Es werden drei Verfahren für die Unterdrückung des Verstärkungsmodulationseffektes durch die zufällig verteilten Störsignale gegeben. Das erste ist ein Verfahren mit Gegenmodulation der Verstärkungsschwankungen. Man verändert die Verstärkung der Schleife gegenphasig zu den durch die Störsignale bedingten Änderungen. Das zweite Verfahren ergibt dieselbe Funktion durch eine periodische Phasenumkehrung. Das letzte Verfahren, das vorgeschlagen wird, besteht in der Einschaltung einer zusätzlichen Verzögerung in der Schleifenanordnung, damit das umlaufende Störsignal, das in der Hauptverzögerungsleitung gebildet wird, ausser Schritt tritt, so dass das Störsignal sich nicht mehr durch Summierung verstärken kann.

6.2. Verbesserung der Stabilität.

Zwei Verfahren werden für Stabilisierung der Schleifenverstärkung vorgeschlagen. Das erste besteht darin, dass man ein zusätzliches sinusförmiges Signal in die Schleife einführt und dann konventionelle Schaltungen zur automatischen Amplitudensteuerung verwendet. Das andere Verfahren ergibt eine Stabilisierung der Verstärkung durch Verwendung der Bezugsimpulse, die sich schon in der Schleife befinden. Dieses letzte Verfahren ergibt eine 50-fache Verbesserung der Stabilisierung durch den Einsatz eines Differenzverstärkers mit einem Verstärkungsfaktor von 60.

Die Frequenzen wurden konstant gehalten durch den Einsatz von Quarzgeneratoren für die Bezugs-Trägerfrequenz. Die addierten Frequenzen, werden durch ein Gegenkopplungsverfahren stabilisiert, bei welchem die addierte Frequenz durch periodische Impulse gebildet wird, die von der Verzögerungsleitung getrennt werden. Mit dem Einsatz dieser Stabilisierungsverfahren wurde es möglich mit beschriebenen Anordnungen 400 Umläufe des Signale in der Schleife zu erhalten.

6.3. Schlussbemerkung.

Es wird gezeigt, dass das Dopplerfrequenzmessgerät mit in einer geschlossenen Schleife eingebauten Verzögerungsleitung gleichwertig ist mit einer Anordnung, welche mehr als 400 nacheinandergeschaltete Bandpassfilter beträgt, wenn das Signal 400 Umläufe in der Schleife beschreibt. Um aber eine bessere Betriebssicherheit zu erreichen, bedarf die Stabilität des Systems weitere Untersuchungen.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & C[ie]
Quai des Grands-Augustins, 55.
158507-61

Dépôt légal, Imprimeur, 1961, n° 1449.

Imprimé en France.

C. D. U. : 621.317.444

Un magnétomètre à pompage optique pour l'étude du champ spatial, par L. Malnar et J.-P. Mosnier.

Ann. Radioélect., n° 63, janvier 1961, p. 3-8, 5 fig.

Les auteurs décrivent un magnétomètre basé sur la résonance magnétique de la vapeur de césium. La résonance et sa détection sont rendues possibles au moyen du procédé de pompage optique. Un prototype de laboratoire a été étudié et ses performances ont été comparées à celles d'un magnétomètre Gulf. La sensibilité du prototype qui est actuellement de 1 γ sera portée à 0,1 γ au cours de l'étude qui se poursuit actuellement.

C. D. U. : 621.317.36 : 621.396.962.23

Transposition fréquence-temps pour la mesure d'une fréquence inconnue (II[e] partie), par R. H. Baumann.

Ann. Radioélect., n° 63, janvier 1961, p. 69-93, 22 fig.

Dans la première partie de cette étude, l'auteur a montré que des signaux sinusoïdaux circulant dans un système en boucle fermée, qui comporte une ligne à retard et un modulateur, sont transformés en impulsions, dont le décalage est une mesure de la fréquence Doppler recherchée. Dans la deuxième partie, il considère les limitations du système; notamment, il traite théoriquement le cas d'un système imparfait ayant des signaux parasites dans la ligne à retard et dans le modulateur. Cette analyse explique bien les résultats expérimentaux décrits dans la première partie. En conclusion, l'auteur propose plusieurs méthodes pour améliorer la stabilité du système et pour minimiser l'effet indésirable des signaux parasites. Le nombre maximal de tours obtenu en laboratoire avec un de ces procédés était de 400, soit une amélioration de 20 fois le rapport signal/bruit (en amplitude), et une précision en fréquence Doppler meilleure que 0,5 %.

C. D. U. : 621.526

Introduction à l'analyse des systèmes asservis à information pulsée, par S. Thelliez et J.-P. Gouyet.

Ann. Radioélect., n° 63, janvier 1961, p. 9-58, 61 fig.

Après avoir défini la classe des systèmes asservis étudiés dans cet article, les auteurs traitent les deux principales opérations d'échantillonnage et de reconstitution de l'information. Ils présentent ensuite de manière logique, la transformation Z, la transformation inverse et leurs propriétés les plus intéressantes. L'étude de cette transformation permet alors, comme dans le cas des systèmes linéaires, de définir les fonctions de transfert pulsées des principales structures rencontrées pratiquement et cette extension de la notion de fonction de transfert est le sujet du troisième chapitre. Le quatrième chapitre utilisant les bases établies par les trois premiers expose simplement l'analyse de la stabilité absolue de cette famille de systèmes dont l'importance est montrée dans la conclusion.

U. D. C. : 621.526

Introduction to the theory of pulsed information servo controls, by S. Thelliez and J.-P. Gouyet.

Ann. Radioélect., No. 63, January 1961, p. 9-68, 61 fig.

Having described the class of servo controlled systems examined in this article, the authors deal with the two main sampling and reconstitution operations on the information. They then present in logical form the Z transformation, the inverse transformation and their more interesting properties. As in the case of linear systems, the investigation of this transformation helps to define the pulsed transfer functions of the principal structures encountered in practice, and this extension of the transfer function is the subject of the third chapter. The fourth chapter sets out, on the bases established in the first three chapters, and in simple manner, the analysis of the absolute stability of this family of systems the importance of which is demonstrated in the conclusion.

U. D. C. : 621.317.444

An optical pumping magnetometer for the study of the magnetic field of space, by L. Malnar and J.-P. Mosnier.

Ann. Radioélect., No. 63, January 1961, p. 3-8, 5 fig.

The authors describe a magnetometer based on the magnetic resonance of cæsium vapour. Optical pumping is used to produce resonance and for its detection. A laboratory model has been designed and its performance compared with that of a Gulf magnetometer. The sensitivity of the model is at present 1 γ and will be improved to 0.1 γ in the course of the work actually in hand.

U. D. C. : 621.317.36 : 621.396.962.23

Frequency to time transposition for the measurement of an unknown frequency (Part II), by R. H. Baumann.

Ann. Radioélect., No. 63, January 1961, p. 69-93, 22 fig.

In Part I of this investigation, it was shown that the circulating sinusoidal signals in a closed-loop system, which consists of a delay line and a modulator, are transformed into impulses whose time shift is a measure of the unknown Doppler frequency to be determined. In Part II, the system limitations are considered; more specifically, an imperfect system with spurious signals in the delay line and in the modulator is treated theoretically. This analysis provides a good explanation of the anamolous experimental results described in Part I. In conclusion, several methods are proposed for improving the system stability and for minimizing the undesirable effect of spurious signals. The maximum number of recirculations obtained experimentally with one of these method was 400, which corresponds to a twenty-fold improvement in the signal-to-noise amplitude ratio, and to the determination of the Doppler frequency to within 0.5 %.

D. K. : 621.317.444

Ein Magnetometer mit optischer Resonanz zur Untersuchung der Felder im Weltraum, von L. Malnar und J.-P. Mosnier.

Ann. Radioélect., Nr 63, Januar 1961, S. 3-8, 5 Abb.

Die Verfasser beschreiben ein Magnetometer, dessen Arbeitsweise auf die magnetische Resonanz des Cäsium-dampfes beruht. Die Resonanz und ihre Feststellung werden durch das optische Pumpverfahren ermöglicht. Ein Erstmuster für ein Laborgerät ist eingehend untersucht worden, und seine Leistungen sind, mit denen eines Gulf-Magnetometers verglichen worden. Die Empfindlichkeit der Erstmuster beträgt z. Z. 1 γ und sie soll im Zuge der Entwicklung, die weitergeführt wird, auf 0,1 γ gebracht werden.

D. K. : 621.317.36 : 621.396.962.23

Umwandlung einer Frequenz in eine Zeit zur Messung einer unbekannten Frequenz (II. Teil), von R. H. Baumann.

Ann. Radioélect., Nr 63, Januar 1961, S. 69-93, 22 Abb.

Im ersten Teile dieser Untersuchung hat der Verfasser gezeigt, dass sinusförmige Signale, die in einer geschlossenen Schleife umlaufen, welche eine Verzögerungsleitung und eine Modulatorstufe enthält, in Impulse verwandelt werden, deren Abstand ein Mass für die gesuchte Dopplerfrequenz gibt. In diesem zweiten Teile untersucht er die Beschränkungen dieses Verfahrens und behandelt theoretisch den Fall einer unvollkommenen Vorrichtung mit Störspannungen in der Verzögerungsleitung wie im Modulator. Diese Untersuchung ermöglicht die Auslegung der Versuchsergebnisse, die im ersten Teil beschrieben worden sind. Zum Schluss schlägt der Verfasser mehrere Verfahren zur Verbesserung der Stabilität der Vorrichtung und zur Unterdrückung der Auswirkungen der unerwünschten Störspannungen vor. Die grösste Anzahl von Umläufen, die man im Labor mit einem solchen Verfahren erhalten konnte, betrug 400, was einer Verbesserung des Störpegelabstandes um etwa 20 Mal (amplitudenmässig) entspricht.

D. K. : 621.526

Einführung zur Theorie der Servosteuerungen mit impulsweise uebertragenen Informationen, von S. Thelliez und J.-P. Gouyet.

Ann. Radioélect., Nr 63, Januar 1961, S. 9-68, 61 Abb.

Nachdem der Verfasser die Klasse der in dem Aufsatze betrachteten Servosteuerungen genau definiert hat, behandelt er die zwei wichtigsten Vorgänge : die Entnahme der Information und die Nachbildung der Information. Er gibt dann eine logische Darstellung der Z-Umformung und der reziproken Umformung, sowie deren interessantesten Eigenschaften. Durch die Untersuchung dieser Umformung ist es möglich genau wie bei linearen Systemen die Impuls-Uebertragungsfunktion der wichtigsten in der Praxis vorkommenden Strukturen zu bestimmen und diese Ausdehnung des Begriffes der Uebergangsfunktionen bildet das Thema des 3.Kapitels. Im 4.Kapitel werden die in den drei ersten ausgelegten Grundsätze dazu verwendet um auf einfache Weise die absolute Stabilität dieser Familie von Systemen zu zeigen, deren Bedeutung zum Schluss noch unterstrichen wird.

SOMMAIRE

Imp. GAUTHIER-VILLARS & Cie
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS
158507
Dépôt légal, Imprimeur, 1961, n° 1449.
Imprimé en France.

Gérant : L. P. BOULANGER

